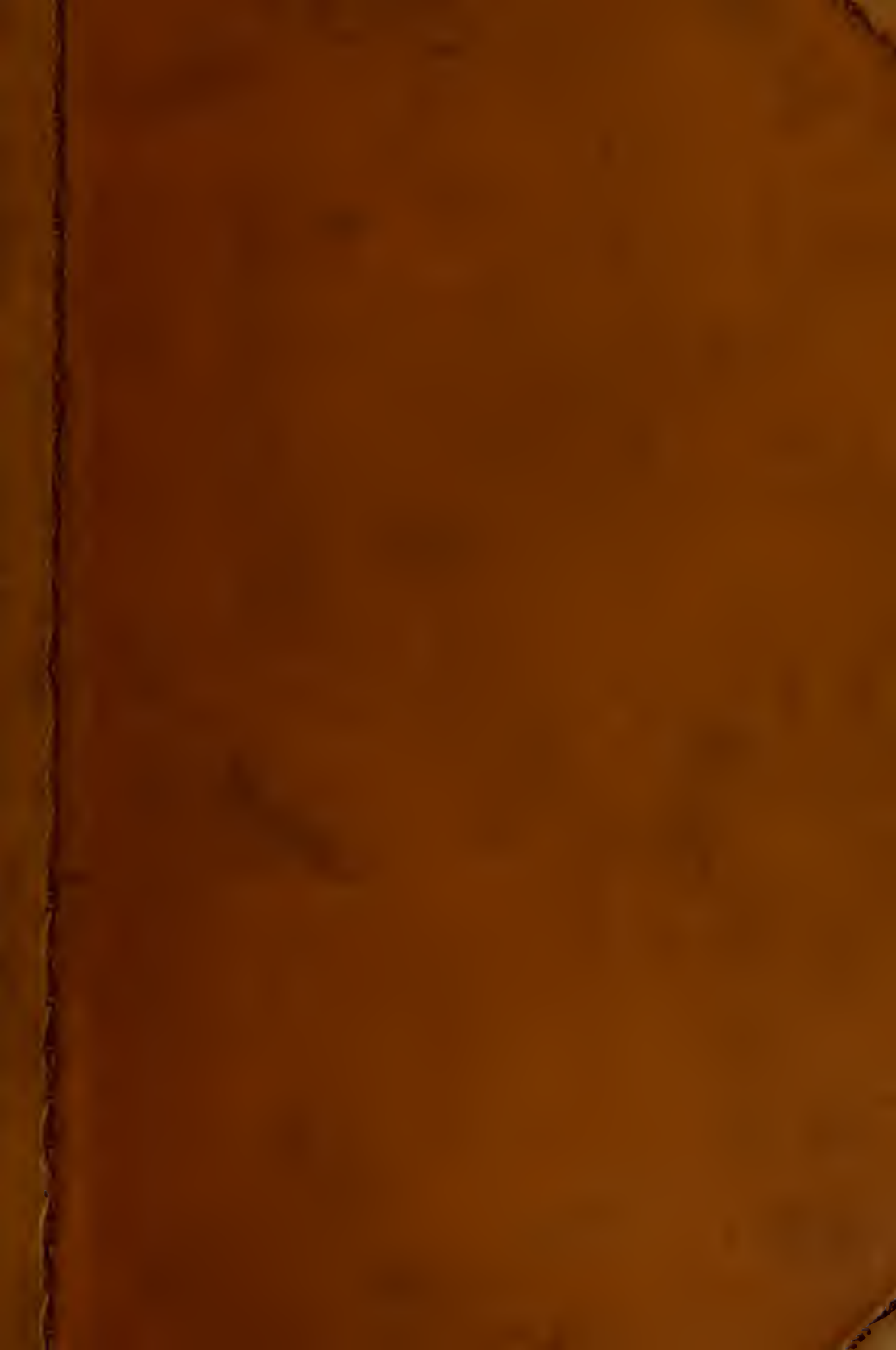




MEMORIE
DELL'
ISTITUTO NAZIONALE
ITALIANO

CLASSE
DI FISICA E MATEMATICA

TOMO SECONDO. PARTE SECONDA



BOLOGNA. 1810

PRESSO I FRATELLI MASI E COMPAGNO

TIPOGRAFICI DELL' ISTITUTO

DISCORSO E OSSERVAZIONI.

INTORNO I RECENTI PROGRESSI DOVUTI AGL' ITALIANI
DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE.

Vincet amor patriae

Virg. G. Aen.

*D*ella specie nostra si avvera che per istituzione provida della Natura di non lieve momento è sopra di essa in più incontri e sopra ogni particolare individuo l'influsso della emulazione. A giudizio de' savii scorgesi palesemente che nelle vedute sublimi della gran Madre anche questo principio avvedutamente da essa inserito nella costituzione dell'uomo concorrer doveva a scuoterne e sferzarne l'industria; onde riguardo allo sviluppamento di questa tutto non rimanesse affidato alle mere voci e allo stimolo comechè acuto sopra ogni altro ed efficace del prepotente bisogno. Chi ponga mente alla prestanza dello scopo, non prenderà meraviglia che non ne' soli particolari individui faccia mostra di se la forza di questo principio, ma che essa si allarghi ad abbracciare ne' suoi effetti le intere nazioni: della qual verità, giacchè anche nell'ordin morale conviene attenersi alle prove sperimentali, basta a convincercene il fatto e l'esempio illustre quanto niun altro de' popoli che pretendono egualmen-

te al vanto della invenzione della bussola; senza della quale l'ardito navigante si troverebbe costretto quasi a premer le spiagge, e avventurandosi a scostarsene, smarrirebbe agevolmente nell'ampio mare il polo e il coraggio. Guai in fatti a que' popoli che non sentono questa voce. Tace con essa lo spirito nazionale, fonte precipuo delle belle e memorabili imprese. Nè riguardando a ciò diasi retta a una mal intesa filantropia, che vorrebbe spento l'amore della propria nazione, immaginando che ne approfitterebbe quello del genere umano. Eh che le così fatte sottigliezze, o con più vero nome grosserie metafisiche non voglionsi ascoltare a fronte delle disposizioni sovrane della Natura.

Benchè l'esperienza ne ammaestra eziandio, che per un fenomeno degno di osservazione l'influsso del mentovato principio giugne a tale che anche le diverse età manifestano un'ambizione conforme, e i secoli nel succedersi e sospingersi aspirano a primeggiare gli uni su gli altri; e gli uomini che ci vivono, si annunzian persuasi di possedere qualche maggioranza su i trapassati. Al qual proposito vuolsi confessare che le lodi, delle quali ogni età è liberale a se stessa, non vanno per solito disgiunte da qualche eccesso; ch'essa non di rado magnifica oltre il dovere i proprii vantaggi; de' quali per altro non manca quasi mai qualche melanconico che all'opposto ne opina bassamente, e cerca quanto è in lui di estenuargli e invilirgli. In-

torno a che , a fine di uscire omai da' proemii , non ci sia disdetto di arrestarci alquanto su i tempi presenti , ne' quali ci si offre occasione e materia ad alcune osservazioni della specie di quelle che gli equi e discreti lettori non ci biasimeranno di aver poste alla testa di questo volume .

De' nostri tempi è lecito il dire che si farebbe ad essi il torto grande chi rifiutasse loro il diritto alla gratitudine de' posteri , presso de' quali parleranno a loro favore le scoperte di cui s' illustrano in alcuni nobilissimi rami dello studio della Natura . Congiuntamente per grande ventura di questo studio , paralleli , per così dire , e proporzionati ai suoi incrementi sono stati quelli che pur a' di nostri , mercè le fatiche e conquiste de' sommi geometri del secolo , ha ottenuti l'analisi sublime ; nella quale non ha dubbio che non convenga riporre lo strumento richiesto a compiere ed esaurire le spiegazioni qualunque d' ogni naturale fenomeno ; giacchè di queste spiegazioni è d' uopo confessare che rimangonsi nello stato di meri schizzi ed abbozzi finchè non riesca di applicar loro i calcoli e le misure . Congratuliamoci dunque co' nostri tempi ; e se taluno per avventura nell' encomiarneli trascorresse a qualche esagerazione , non si usi verso di esso soverchia severità . In vece , diasi il debito tributo di ammirazione e riconoscenza a quella gran Mente , che conosce le molle tutte del cuore umano , e tutte pure tratta e

maneggia mirabilmente, donde mosse l'ordine all'Istituto Nazionale di Francia di presentare un Quadro e prospetto dello stato attuale delle Scienze fisiche e matematiche, e de' progressi loro nel periodo compreso fra il 1789 e il 1807. Al cenno soddisfece prontamente quel ragguardevole Corpo, affidandone l'incarico a due suoi chiarissimi membri e degnissimi di rappresentarlo; e questi memori che i. Dotti d'ogni nazione formano siccome una repubblica, qual costumasi di appellarla, recarono all'esecuzione il sapere, la diligenza e l'imparzialità necessaria. Però alla mancanza soltanto renduta probabilmente inevitabile dalle circostanze in cui trovavansi, delle notizie richieste all'uopo attribuir vuolsi che il ragguaglio o più veramente il compendio uscitone in luce sembri, riguardo alle fatiche degl'Italiani, scarso anzichè no e bisognoso di supplemento. Mirano a questo scopo le poche osservazioni seguenti; le quali quand'anche movesser sospetto che a dettarle fosse concorso un sentimento soverchio tenero dell'onor nazionale, chi sarà di animo sì alpestre che voglia rimproverarne? Tutto sta che in esse non si offendano i diritti inviolabili della giustizia.

Or questa ne costringe appunto ad osservare prima di tutto, che il chiarissimo Ruffini non a torto si lusinga d'esser riuscito a dimostrare che non è possibile di ottenere la risoluzione generale delle equazioni algebriche determinate, tosto che esse sorpassano il:

quarto grado. I suoi tentativi vengono per vero dire mentovati alla sfuggita nel compendio; ma senza che vi s'incontri motto dell'esito: donde vuolsi inferire che l'esimio Relatore per un infortunio non raro ad intervenire ai lavori italiani, non conoscendo l'opera del nostro grande Analista che pel canale de' giornali, o essendogli mancato il tempo e l'agio di consultarla, ha creduto di non dovere su di essa interporre verun giudizio. Il fatto è che Ruffini premendo le orme dell'illustre Lagrangia che aveva fatte le prime spese, e spingendosi oltre i confini entro de' quali questi arrestossi, ne ha tolto, può dirsi, ogni lusinga di vedere sciolte generalmente per una risoluzione, a cui competano i caratteri di algebrica, le equazioni determinate. A cessare gli scrupoli, se n' ha mestieri, potrebbe fra gli altri addursi il suffragio del celebre Paoli, da cui dichiarasi giusta in ogni sua parte e rigorosa la dimostrazione del nostro collegu; e che, sconsortando gli analisti dall'occuparsi più oltre di una soluzione impossibile ad ottenersi, aggiugne riguardo alla storia del problema una riflessione affacciutasi congiuntamente ad un altro scrittore, che si compiace assai d'essere in ciò d'accordo con un uomo tale. Osservano entrambi che in Italia nel secolo decimosesto fra le mani dei Ferri, dei Tartaglia, dei Ferrari, dei Bombelli l'Algebra finita riuscì a sciogliere compiutamente le equazioni del terzo e quarto grado. Quì essa arrestos-

si, e incontrò uno scoglio a cui ruppero gli sforzi sommi degli analisi. Anche a nostra memoria l'acuto Vuring che sulle prime immaginava di avere sciolte generalmente le equazioni del quinto grado si avvide, senza ch' altri ne l' ammonisse, dell' abbaglio, e si affrettò a confessarlo. Finalmente Lagrangia e Ruffini, il primo, come è detto, additando la strada, l' altro battendola e raggiungendone il termine felicemente, ne hanno obbligati a rinunziare omai a ogni speranza. Così dell'algebra finita può dirsi esser dessa una scienza dagli ingegni italiani aperta e chiusa.

Poichè ci è occorso di far menzione dell' illustre Lagrangia, di cui l'Italia si pregia d' essergli patria, niun torto non si farebbe a veruno, e molto meno alla gloriosa Nazione che lo possiede attualmente ed è d'altronde sì ricca che non ha mestieri di crescere delle spoglie altrui, chi mettesse fra gli acquisti procacciati dagl' Italiani alle scienze esatte nel giro di anni compreso nel rugguaglio anche alcune produzioni di questo rarissimo ingegno. Fra le altre appartiene a quest' epoca l' insigne lavoro, per cui non contento egli di avere allargati oltremisura i confini del calcolo sublime, ha voluto anche rischiuarne l' iagresso e stabilirne i principii sopra basi più salde, proscrivendo nell' applauditissima sua Teoria delle funzioni analitiche le idee per lo meno inesatte e nebbiose dell' infinito e dell' infinitesimo. Alla nobile impresa non poteva man-

care il voto degli amici del rigore assoluto. Molti fra essi commossi dal suo esempio sonosi affrettati a seguirne le insegne, e consapevoli delle lor forze mostrano di non curare gran fatto che la nuova strada sia forse alquanto men breve e piana e agiata della comune. In fatti non ha problema sì arduo fra quelli, ai quali si applica utilmente il calcolo differenziale e integrale, di cui essi, valendosi del nuovo metodo, non trionfino felicemente. Intorno a che, a rischio che la sicurezza venga dichiarata eccessiva, non sia disdetto di tornare un momento sopra di un articolo, su cui nel discorso premesso alla prima parte di questo tomo, si ebbe il coraggio e l'ardimento quasi di porre qualche parola in bocca a Bacone. Restrungendo il tutto in una sola osservazione, certo che convien confessare, e congratularsi con l'analisi che le modificazioni introdotte dalla teoria delle funzioni nel calcolo sublime, ne assodano le fondamenta senza scemar punto in lui l'attitudine a sciogliere ogni più arduo problema. Ma d'altra parte saranno forse di quelli, che non si crederanno per questo tenuti a rinunciare al vantaggio di giugnere alla meta per una strada più corta alquanto e spedita. A questa, diranno essi, ci attérrem quindi innanzi con più coraggio, giacchè fortunatamente la teoria delle funzioni è sopravvenuta a rassicurare i nostri passi pel lume che aggiugne alla metafisica del calcolo sublime. Aggiugneranno essi forse che potendo,

b

come giova sperarlo, lo stesso calcolo dilatare le sue conquiste, e riempiendo le molte lacune, che vi s' incontrano per ogni dove, avvantaggiarsi di nuovi metodi, e porsi per essi in istato di affrontare ricerche ognor più ustruse e inaccessibili alle attuali sue forze, ragion vuole, che non si abbia a vile niuno comechè lieve compendio e comodo che contribuir possa ad agevolarne e affrettarne e renderne comunque meno faticose le operazioni. Chi sa eziandio che alcuno fra essi non tragga innanzi con una supposizione nè illecita per l'un verso, e acconcia per l'altro a spargere qualche lume ulteriore sull' argomento? Ritengasi, dirà esso, che a toglier di mezzo le accuse mosse al calcolo infinitesimale diretto e inverso basta l'interpretare a dovere i termini d' infinito e d' infinitesimo, che colle cifre corrispondenti non vogliono prendersi mai che nell' aspetto di meri simboli destinati ad epilogare i ragionamenti alquanto prolissi, a cui guiderebbe l'assioma per se stesso evidente, che non ha quantità tanto grande o tanto picciola, di cui non possa assegnarsi una rispettivamente o maggiore o minore. Posto ciò e conceduto, fingasi che nella fausta occasione del primo scoprimento del calcolo sublime si fosse offerto alla sagacità degli analisti prima di tutto quello che riposa sullo sviluppo delle funzioni. Non ha dubbio che per trionfi estesi a un di presso egualmente, solo forse alquanto men rapidi, non si

fossero vedute crescere e prosperare le parti tutte delle matematiche pure e miste. Se fosse in seguito comparso un Leibniz e un Neuton, che conservando al metodo l'esattezza e il rigore col variarne acconciamente i simboli e i segni, lo avessero addestrato a procedere con passi più risoluti, niuno avrebbe rifiutato di accogliere cogli applausi la novità, nè veruno scrupolo avrebbero in lui desto i termini d'infinitesimi e di flussioni. Chi è al presente che rinfacci al Cavalieri l'introduzione del termine d'indivisibili sì duro e offensivo delle orecchie severe? Or facciasi ragione che presso quelli, i quali di mala voglia rinunzierebbero al calcolo infinitesimale, d'altro appunto non trattasi che di ritenere un comodo, di cui loro sembra, che, ove conformemente all'accennata supposizione i due metodi si fosser tenuti dietro con ordine inverso, avrebbe raccolti a suo favore tutti i suffragi. Per altro anche i più tenaci fautori del calcolo comune convenir debbono de' vantaggi inestimabili ad esso recati dalla teoria dello sviluppamento in serie delle funzioni analitiche. Armato di questo soccorso ha potuto l'illustre Lagrangia seder giudice fra Neuton e i due Bernulli Giovanni e Niccolò, e scorgere e udditare l'origin vera sottrattasi all'acume de' due Critici, di quel sottile abbaglio, che sfuggì all'Inglese e fu da lui corretto nella seconda edizione de' suoi Principii, là dove cerca la resistenza incontrata in un mezzo qualunque da

un Grave lanciato entro di esso, del quale supponga-
si che descriva liberamente una curva data. In tale
incontro tuttavia il sommo matematico torinese me-
glio anche che non dell' esattezza del metodo fa mo-
stra delle proprie forze, ed ha motivo giustissimo di
compiacersi di questa singolar prova del suo acutissi-
mo ingegno.

Debbonsi parimente i maggiori encomii a quel
prode analista, nostro Collega, che nell' aspetto qua-
si di Mantentore per le prerogative del metodo delle
funzioni analitiche essendo disceso nell' arringo aperto
ultimamente dalla illustre accademia di Padova ha
ottenuto fra i concorrenti la meritata corona. Benchè
non può farsi menzione del chiurissimo Brunacci sen-
za che corrano all' animo congiuntamente i suoi meri-
ti verso le matematiche e i loro progressi appartenen-
ti al periodo compreso nel Ragguaglio e Compendio,
che forma l' oggetto precipuo delle presenti Osserva-
zioni. Gli sono queste scienze debtrici per più riguar-
di, e nelle parti loro più nobili, come a recarne pure
uno o due esempj fra i molti, là dove ci si occupa
utilmente di quel ramo di analisi, in cui gli acquisti
recenti da essa fatti nel calcolo delle differenze finite
la mettono in istato di avvolgersi con sicurezza fra le
incertezze delle probabilità, e di sottomettere al calco-
lo i capricci stessi e la temerità della fortuna; come
pure là dove ha desso spinto oltre i limiti, ne' quali.

era rimasta fra le mani del chiarissimo Le Gendre la scoperta de' criterii richiesti a distinguere i massimi dai minimi delle formole integrali indefinite.

Nel periodo mentovato cadono similmente parecchie insigni scoperte che rendono il dottissimo Paoli benemerito di questi studii quanto veruno. E nondimeno incidentemente soltanto e alla sfuggita e una sola volta il Sunto lo nomina sul proposito delle differenze parziali dette acconciamente miste da Lacroix; e anzi gli si associa il Sig. Poisson; nel egli certamente memore de' suoi trionfi nell' età fresca di poco oltre i venti anni non rifiuterà la compagnia di questo valoroso giovine francese; e certo della sua gloria, che non può essere dal silenzio offuscata, non si lagnerà nè anche che un semplice cenno renda conto delle novità rinchiuse nel profondo opuscolo da lui con altri due aggiunto ai suoi aurei elementi di algebra, nel quale, a restringer tutto in breve, si percorre una carriera dischiusa appena e da lungi addituta da un Condorcet e da un Laplace; nè che venga taciuto ogni altro suo merito verso le parti più elevate dell' Analisi da lui provveduta di metodi ingegnosissimi, in ognun de' quali si trova scolpita l' impronta del nuovo. Meno poi a lui premerà di non veder mentovata la correzione o modificazione che voglia dirsi, da lui aggiunta ad una nobile scoperta dell' illustre Monge, al qual debbesi d' essersi avveduto prima di ogni

altro, che quando nelle equazioni differenziali a più di due variabili vengon meno i criterii d' integrabilità, non vuolsi già per questo dichiararne disperata l' integrazione. Ben dell' avviso può dirsi che non dispiacque al grande matematico francese; giacchè in fatti esso punto non diminuisce il merito di una osservazione, da cui come da germe, pullulò un nuovo intero ramo di analisi. Di queste dimenticaggini il Sig. Paoli non vorrà certamente adontarsi, vedendo di avere in ciò comune la sorte col dottissimo Fossombroni, il nome del quale celebre fra i matematici viventi, si cerca indarno nel compendio. E pure, per tacere tanti altri titoli, doveva esso correre sotto la penna dell' egregio relatore, allorchè almeno questi annoverando le dimostrazioni di fresco recate del principio delle velocità virtuali, pare che non potesse sfuggirgli l' esimio lavoro analitico pubblicato su questo argomento da Fossombroni, che nel rafforzar quel principio della bramata rigorosa dimostrazione avverte incidentemente e dimostra poter esso sussistere, quand' anche le differenze delle velocità virtuali si concepiscano comunque finite; la qual ultima avvertenza pare che non siusi nè anche sottratta all' autore della nuova esatta dimostrazione inserita nel primo di questi volumi, del principio dell' equipollenza, nel caso almeno speciale, in cui venga posto mente ai vincoli, che passando fra questo principio e quello delle velocità virtuali permettono

d'inferire a vicenda l'uno dall'altro. In somma, malgrado il silenzio della relazione, la Toscana si pregia di possedere in un Paoli, in un Fossombroni, in un Brunacci chi ha diritto di aver posto onorevole fra quelli che a' dì nostri sono concorsi a sollevare a maggiore altezza un edificio, che mentre quinci reggesi stabilmente su la geometria, quindi mercè l'analisi poggia oltre ogni confine colla inaccessibile cima.

Se Mascheroni fosse fra i vivi, certo ch'ei si compiacerebbe delle lodi, di cui il compendio è liberale alla sua geometria del compasso. La compiacenza per altro non lo tratterrebbe forse dal metter qualche lamento che in uno specchio de' progressi della scienza non venga fatta commemorazion niuna delle fatiche da lui utilmente impiegate intorno a una formola ribelle agli sforzi degli analisti accintisi ad integrarla, e ch'ei non pertanto riuscì a domare felicemente. Non a torto gli stava a cuore una fatica che basterebbe di per se sola a farne fede che non gli mancava vigore e lena onde ergersi a voli più alti, se morte immatura non fosse fatalmente sopravvenuta a troncargli le ben concepite speranze. Per altro di questo infortunio gravissimo che pose per così dire le Matematiche in lutto, l'Italia si racconsola mirando a quelli che nati nel suo seno, e costituiti in età fresca si annunzian disposti a ristorarla del danno. Fra gli altri, per dire di un solo, permetta la modestia del sig. profes-

sore Magistrini che non si passi sotto silenzio la sua recente opera e a più riguardi originale sulla misura de' Poligoni. In essa sopra un oggetto toccato piuttosto che trattato finora ci si apre dinanzi un sentier nuovo, e passeggia per luoghi = nullius ante trita solo =. Perchè vuolsi osservare che egli svolgendo il suo argomento insegna all' analisi metodi generali e luminosi, e la mette in istato d' intraprendere con sicurezza ricerche, intorno alle quali gli analisti che lo precedettero, più che non le forze della medesima, avevano mostrate quelle del proprio ingegno. Soffra egli pure che alle congratulazioni dovutegli si aggiunga ch' ei nel rivolgere a se gli occhi del Pubblico, gli ha posto congiuntamente in mano siccome un pegno e un' arra di ciò che gli è lecito di promettersi e aspettare da lui.

Ma per attenerci scrupolosamente ai limiti prescritti alla relazione, del celebre Oriani diremo noi che in essa gli si renda la dovuta giustizia? o non piuttosto che questa riguardo ad esso soffra qualche sensibile offesa? Com' è che non vi si fa motto de' suoi *Elementi di trigonometria sferoidica*! lavoro che del 1806 cominciò ad essere di pubblica ragione. Forse che in essi non contiensi una moltitudine di cose degne per la novità, utilità ed eleganza, che gliene sappiano grado gli analisti, gli astronomi, i geografi? e che gli ottennero in fatti per parte degl' intendenti i

massimi applausi? Forse che poteva all' autore del Sunto rimaner nascosta un' opera, in cui per un vero incremento della scienza spinta in essa, può dirsi, alla perfezione, vengono sciolti compiutamente problemi conformi ad uno, di cui erasi desso occupato, e del quale, malgrado la sua singolare perizia, non era giunto a recare salvo che una soluzione ristretta e incompleta? Com' è dunque ch' ei dimentica un servizio tale renduto dal nostro Oriani a una scienza che pur gli è cara? Gli si potrebbe chiedere inoltre il motivo per cui egli parlando di Urano, non citi quasi Oriani che per sacrificarlo a se stesso, aggiugnendo ch' esso per la scarsezza delle osservazioni impiegate non fu abbastanza felice nella determinazione degli elementi ellittici dell' orbita descritta dal pianeta. Non s' intende di estenuar punto il merito delle sue Tavole, di cui ei ne informa che il corso di ben diciassette anni comprova l' esattezza: pur sembra che avrebbe potuto notarsi il singolar pregio di quelle che a vantaggio grande degli astronomi trovansi inserite nelle Effemeridi di Milano. In esse per uno sforzo raro d'ingegno trovansi eglino provveduti di soccorsi nè chiesti e aspettati, nè forse creduti possibili. Intorno a che non vuolsi omettere di avvertire che il vantaggio cresce a più doppii, chi ponga mente che gli arificii ingegnossissimi da Oriani impiegati intorno ad Urano, non si restringono ad esso soltanto; com' ei mostra applican-
d

doli alla formazione delle Tavole poste anch'esse nelle mentovate Effemeridi, di Mercurio, cui lo determinano a scegliere gli ostacoli particolari che lo rendono alquanto men docile ad ascoltar questo freno, che non la più parte degli altri pianeti primarii. Ma su questo proposito la celebrità a cui è salito il nostro eminente Astronomo rende soverchia ogni ulteriore osservazione. Di lui e de' coltivatori pari a lui della scienza degli astri è lecito il dire che per un privilegio speciale i loro nomi perverranno alla più tarda posterità intrecciati a quelli delle Costellazioni da essi contemplate.

Fra gli acquisti non rari, de' quali sono a' dì nostri cresciute le Matematiche miste, merita quanto veruno, di arrestare sopra di se gli sguardi degli intendenti quello di cui l' idrodinamica è debitrice alle cure del chiarissimo sig. professore Avanzini. Da una serie numerosa di esperienze, nelle quali riluce per tutto la sagacità nell'immaginarle, la destrezza nell'eseguirle, il criterio nell'interpretarle, è desso condotto ad ammonire i matematici a volere per una indispensabil riforma introdurre qualche cambiamento nelle formule da essi adottate a determinare la posizione del centro di resistenza opposta da un obice qualunque all'azione de' liquidi. Senza ciò vengono quelle formule palesemente a contrasto colla sperienza e col fatto. L'argomento pure lo guida ad entrare animosamente in

zuffa coi Robins, coi Juan, cogli Euleri padre e figlio, e ne esce ogni volta vittorioso. Una folla di conseguenze emerge dalla scoperta; e le applicazioni molteplici per cui può farne suo profitto l'idraulica, la balistica, la nautica, le aggiungono importanza tale, onde non si esita a riportarla fra quelle, di cui più si onorano i nostri tempi. Del resto non è molto a stupire che non se ne parli nel compendio francese. Delle merci italiane di tal natura è noto che penano assai a valicar le alpi, comechè queste un Eroe le abbia omai col braccio e col senno per così dire appianate. Se il nostro Volta non recavasi a Parigi, i Dotti di colà proseguirebbero forse a perfidiare che il Fluido galvanico è diverso dall'elettrico. Intorno a che sia lecito di osserrar di passaggio che quelli i quali si ostinano a riconoscere differenze essenziali fra i due fluidi, inciampano, senza forse avvedersene, in un equivoco poco diverso da quello, in cui urterebbe chi pel motivo o pretesto che il dividere il tempo è un effetto essenzialmente diverso da quello di cuocere un pollo immaginasse, che la gravità, mentre nell'orologio a pesi e a pendolo guida in giro l'indice che segna le ore, non fosse identica a quella che anima il menar-rosto.

Ad un infortunio di origin conforme trovasi esposto con esso il suo gonometro il nostro celebre Pino; sebbene per l'un verso il Sunto non dimentichi in tut-

to le macchine, e per l' altro l' invenzione non fosse nè anche affatto ignota in Francia, dove, ha qualche anno, ne parlò il giornale delle miniere. Il fatto sta che i Mineralogisti debbono super grado al Fisico eccellente e Geologo sommo che gli ha provveduti d' uno strumento dopo i miglioramenti di fresco aggiuntigli di gran lunga superiore a qualunque altro finora proposto; che può rivolgersi ad usi sopra modo svariati nel carattere di vero pantometro; e del quale ponno essi servirsi a guisa di filo, onde avvolgersi con sicurezza nel buio e laberinto delle Cave e in que' luoghi riposti misurare gli angoli, la direzione, la pendenza de' filoni, delle vene, degli strati terrestri.

Quì non sia disdetto d' interporre una riflessione suggerita dall' argomento. La brevità del compendio non vieta all' egregio relatore di arrestarsi con qualche compiacenza su le operazioni geodesiche, = *quarum pars magna fuit*, = che in Francia fu giuoco forza intraprendere a quell' epoca luttuosa, in cui era quivi pur sorto il capriccio d' innovar tutto. Diedero in quell' incontro i travagliatori una prova e un esempio illustre di zelo e di fermezza imperturbabile; della quale essendo uno di essi rimasto vittima, gli altri non isgomentiron per questo, e a traverso gl' inciampi, i disagi, le avversità senza numero ch' ebbero a sostenere, guidarono a termine la malagevole impresa. Fra i vantaggi quali diretti, quali subalterni ad essa dovuti

ne ottennero pur quello di potere per una grande e universale riforma riferire le misure tutte ad una stabile unità, scegliendo all' uopo la diecimillesimesima parte del quadrante di un meridiano terrestre, e denominandola metro. Della permanenza di questa unità ci è in certa guisa mallevadore il Globo, finchè esso almeno ritenga la sua attuale figura; e ove col volger de' secoli nasca pur qualche dubbio sulla giustezza de' campioni del metro che serbansi all' uso di servire di norma, sarà sempre lecito di rifarsi da capo, e con nuove misure di un arco del Meridiano cercar nella terra il modello che per avventura si sospetti perduto. Però non a torto gli Astronomi compiaccionsi di avere procacciato agli uomini questo vantaggio; e quando anche nel magnificarlo trascorran a qualche eccesso, sarebbe scortesiu lo sgridarnegli, giacchè non si vuol pretendere che ad un oggetto qualunque, intorno a cui siasi impiegata molta fatica, non si rechi eziandio molta importanza. Certo che di questo nuovo sistema di misure menasi al presente il romor grande; nè non sarebbe punto a stupire che qualche o severo o fastidioso trovasse alquanto esagerati i vanti, pe' quali direbbsi che nell' opinione di alcuni mercè questo soccorso e quello pure delle nuove nomenclature debba l'ingegno umano metter le ale e spaziar con più agilità pe' campi dello Scibile. Non manca chi nel linguaggio che tiene annunzia speranze così magnifiche, sen-

za forse por mente che le vere conquiste nello studio della Natura debbonsi per solito alla comparsa di alcuni di que' rari uomini, ai quali per la luce improvvisa, che su di esso diffondono è concesso di affrettarne i progressi. Direm noi che conseguentemente alle novità proposte e in parte adottate sorgeranno quindi innanzi con più frequenza i Laplace in Francia, in Italia i Lagrangia? Davvero che sembra lecito di dubitarne. Nè per questo già punto scemù il merito di quegli Astronomi coraggiosi, che mirando allo scopo, non furon disanimati dai pericoli, fra i quali si avvolsero. Ne sieno ad essi grazie senza fine. Così a qualche compenso delle loro fatiche consentano le nazioni ad accettare d' accordo contro il loro costume le nuove misure. Per tal modo si eviterebbe la fatica e la noia del tradurre, come spesso interviene, le misure di un paese in quelle di un altro. Diasi che in ciò consista unicamente il profitto; nè per esso ottengasi che il sollievo de' pigri. Forse che non è quasi possibile d' impedire che gli uomini a tratto a tratto non ascoltino la pigrizia? della quale però giova con acconci provvedimenti tener lontani gli effetti sinistri.

Prima di congedarsi dalla parte matematica del compendio, poichè in esso l' angustia dello spazio non ha impedito che l' egregio relatore non vi collochi alcuni libri meramente elementari, a sua imitazione sia lecito di citarne uno uscito presso noi, ha pochi anni,

di questa ultima specie. Debbesi esso al chiarissimo sig. Professor Venturoli, che co' suoi elementi di Meccanica e Idraulica riguardo a questi rami delle Matematiche applicate ha provveduto egregiamente ai bisogni della pubblica istruzione. In essi ci si offre siccome un esemplare compiuto e un modello di questa sorta scritture; e il discorso nell' affermarlo non intende che di far eco a que' dotti uomini, che non contenti di commendargli altamente, nelle scuole meritamente loro affidate, sonosi affrettati a sceglierli a preferenza per testo. Benchè, di questa opera elementare può dirsi che confina assaissimo con quelle, cui colloca in una classe più elevata il pregio della invenzione e delle originali scoperte. Non le manca un lustro tale, comechè forse, chi non aguzzi alquanto la vista, non si giunga a discernerlo; con tale accorgimento ha il dottissimo Professore saputo intrecciare e innestare nel corpo della dottrina osservazioni nuove e proprie di lui, che lo dichiaran capace di estendere i confini e crescere il patrimonio della scienza. Di ciò potrebbonsi addurre prove ed esempi; se non che si teme di offendere la modestia dell' Autore; al quale se nel concetto proposto del suo lavoro sembra per avventura che abbia qualche parte l' amicizia, non gli si vieta di crederlo, purchè ritenga congiuntamente, ch' essa intervenendo, non fa niun velo al giudizio.

Parimente, poichè nel passare in rassegna i pro-

gressi di una scienza il relatore si crede permesso di accoppiare agli scopritori i semplici storici, e nomina fra questi Bossut, e Montucla, e fino le informi e tumultuarie aggiunte fatte non senza l'ajuto di qualche assistente all'opera di quest'ultimo dall'astronomo Lalande, le quali per altro non bastano di grun lunga a trarla dall'imperfezione, in cui l'autore lasciolla, davvero che questo onore lo meritava assai più l'opera nel 1797 comparsa presso noi del chiarissimo Cossali sull'origine e i primi passi dell'Algebra. Oh in questa sì che risplende per tutto il molto sapere, l'erudizione estesissima, la critica luminosa, il giudizio severo. A restringere le molte in poco, essa ben mostra che lo Storico allorchè riesce a disotterrare notizie per l'una parte autentiche, e per l'altra peregrine, e sepolte nell'oblivione, può aspirare e pretendere al vanto delle scoperte. Se non che come lusingarsi che nel sunto si trovasse mentovata un'opera che svela e addita i gravi abbagli nè poco frequenti, ne' quali inciampa Montucla, e strascina l'incauto lettore?

Passando ora alla seconda parte del compendio, anche in questa s'incontrano parecchie lacune riguardo ai meriti degli Italiani verso la Fisica nel periodo più volte omai mentovato. Ne recheremo così per saggio pochissimi esempi, nella persuasione che il chiarissimo e umanissimo relatore lungi di adontarsene ama che gli vengano additate. Gli si chiede pure licenza

di porre interamente da parte la Chimica, su cui ei si arresta alquanto a lungo, ravvisando in essa probabilmente la base precipua in fatto di Fisica, della gloria nazionale. Della nota grande rivoluzione a questi ultimi tempi seguita nella Chimica, non sembra vietato il dire ch' essa trovasi attualmente sotto una specie di processo. Pur ora è stata dessa chiamata dinanzi al tribunale e posta, per così dire, sotto la tortura del piliere di Volta, strumento meraviglioso, nel quale non solo è rinchiuso l' arcano forse non più tale de' più astrusi fenomeni animali, ma è pur riposto l' agente meglio di ogni altro efficace a svelare l' intima composizione de' corpi. Finchè l' esito del processo pende incerto, ragion vuole che si tenga sospeso ogni giudizio, nè nulla non si pronunzii su i diritti de' Neochimici raccolti sotto le insegne di Lavoisier ad aver luogo fra i benefattori della scienza, riguardo, s' intende, a certe idee sistematiche; giacchè riguardo ai vantaggi e aumenti reali ad essa procacciati dalle grandi fatiche e utilissime de' medesimi, niun equo e imparziale estimatore vorrà rifiutar loro questo diritto. Ben nel mettere in tutto da banda un ramo delle scienze fisiche, del quale non si dubita che non abbia prosperato e certo è sopra ogni altro coltivato a' dì nostri, non vuolsi omettere di avvertire che in un compendio ove trovansi registrati oltre i francesi i nomi di parecchi Chimici stranieri per vero dire reputatissimi, pare-

f

va che a un onor conforme potesse ammettersi qualche Italiano. Un Brugnatelli per mo' di esempio, un Fabbroni, un Gioberti, un Bonvicini, per vigor d'ingegno, per copia di cognizioni, per istancabile zelo, per utilità e varietà di scoperte non cedono ai più rinomati. Dirassi che l'intero ragguaglio non manca di farne menzione; ma essi risponderanno che bramavano di non essere dimenticati e che i loro nomi si udissero in un discorso detto in una occasion solenne e alla presenza di un Sovrano, che nella grandezza dell'animo suo accoglie ugualmente ogni suo suddito.

Permetta in oltre il dottissimo relatore che gli si chiegga come allorchè parla della dilatabilità de' corpi prodotta dal calore, e cita Dalton e Gay-Lussac, non gli sieno corsi all'animo i diritti anteriori su questo ramo di fisica del nostro illustre Volta? Questi non pago del primato concedutogli da ognuno su la elettricità, e inteso a giovare ad altre parti dello studio della Natura, con una serie di esperienze dirette e decisive ne assicurò che l'aria comune diradasi uniformemente al crescer pure uniforme della temperatura entro i limiti almeno quinci del gelo, quindi dell'acqua bollente. Per una misura che consente assai e coincide quasi con quella del celebre De Luc ci determina in oltre l'aumento uguale di volume corrispondente ad ogni ugual grado di riscaldamento. Egli scopre per ultimo, prevenendo in ciò di parecchi anni l'osservazio-

ne di Gay-Lussac, il fonte, donde emersero gli abbagli più o men gravi presi da quelli che lo precedettero nell' indagine, fra gli altri e sopra gli altri da Morveau. Il perchè a gran torto i Fisici comunemente mettono in non cale i suoi diritti; ne' quali vorrà senza dubbio il dotto ed equo relatore ristabilirlo nel suo ragguaglio e supplire con esso ai difetti del sunto. Qui ci si fa incontro, e viene a porsi da se una osservazione. Nel vapor acqueo è giuoco forza di ammettere una legge conforme; giacchè trovandosi esso sospeso nell'aria, entro della quale l' elasticità sua lo costringe a stendersi per uno spazio eguale a quello della medesima, è manifesto che ogni qualvolta esso non obbedisse a quella legge, già non potrebbe osservarla puntualmente l' aggregato di aria e di vapore. Donde ognora meglio si scorge che il germe dell' intera teoria intorno agli effetti del calore sopra ogni maniera di arie e di vapori trovasi rinchiuso in uno stato di notabile sviluppo nelle sperienze di Volta.

Queste cose, poichè ne tace il compendio, converrà che supplisca il ragguaglio; in cui inoltre permetta l' egregio relatore che gli si additi un' Opera, la quale ben merita ch' ei le serbi un luogo distinto e cospicuo. S' intende quella che il nostro illustre Venturi pubblicò col titolo d' Indagine fisica sopra i colori; lavoro insigne di cui senza esagerazione niuna può affermarsi che per esso la teoria de' colori è spinta oltre i limiti

a cui guilolla quel Grande, che nella sua immortale Ottica aggiunse per così dire alla stessa luce una nuova chiarezza. Per un' Analisi dianzi non tentata, e a certi riguardi più esatta che non quella che su la luce può effettuarsi col prisma, egli, obbligando i raggi a filtrarsi attraverso di più corpi diafani e variotinti, riuscì a tergerli d'ogni eterogeneità e ad ottenere colori puri, mondi, scevri di qualunque meschianza. Guidato dalle sue esperienze, alle origini del coloramento conosciute in addietro tre in numero, per riflessione, per rifrazione, e per accoppiamento e avvicendamento della riflessione e della trasmissione, ne aggiunge una quarta da niuno non avvertita, nella quale nè riflessione, nè rifrazione non ha luogo, ma sibbene la semplice trasmissione. E perchè forse e senza forse frequenti e numerosi sopra gli altri sono i coloramenti di questa ultima origine, si comprende agevolmente come tra mani sì esperte debba profittarne ed esserne per un insigne aumento promossa questa nobile parte delle teorie ottiche; e come al vantaggio partecipi ogni Arte, che manipola e mesce colori. Benchè riguardo anche ai colori di origin diversa l'Opera è ricca per ogni dove di osservazioni nuove, acute, profonde; come là dove difendendosi Neuton, viene convinto di errore il francese du-Tour, che scostandosi dal gran Brianno interpretava nati da rifrazione i colori, de' quali la riflessione e la trasmissione alternando adorna-

no le sottili trasparenti laminette; e là dove con prove sperimentali si mostra non essere l'occhio uno strumento acromatico; e quando recansi congetture soprammodo plausibili appoggiate anch'esse a prove sperimentali su la formazione di alcune meteore enfatiche; e quando si rende ragione delle tinte e cadenze diverse dell'azzurro atmosferico. Bastano questi pochi cenni a farne credere che all'egregio relatore, come in lui la cortesia udegua il raro sapere, dispiacerà di non avere rammemorata un'opera tale. L'autore di essa per altro potrebbe anche querelarsi che nel ristretto per la parte matematica vengano omesse in tutto le sue Ricerche sperimentali sulla comunicazione laterale del movimento de' fluidi, le quali pure furon lette alla presenza dell'Istituto nazionale di Francia, e ne ottenner gli applausi, che non potevano in fatti mancare a un lavoro, da cui deriva all'Idrodinamica teorica e pratica un reale incremento.

Dopo ciò verrà egli concesso di prender posto fra nomi sì illustri all'autore di un opuscolo pubblicato da prima in italiano, poi recato in francese sull'uso delle Anastomosi ne' vasi delle macchine viventi? A prendersi questa sicurtà lo conforta l'importanza del soggetto. Confida egli di avere sciolto un problema arduo assai d'Idraulica animale, e ove abbia raggiunto lo scopo, come ne tiene lusinga, di aver pure recato qualche servizio alla dottrina del circolo del san-

gue; del qual circolo, chi non tolga di mezzo uno scoglio che deluse gli sforzi de' più solenni Fisiologi, non si comprende come si effettui e sussista. Ma i vincoli strettissimi, pe' quali l' autor dell' opuscolo forma un tutto con quello del presente discorso, non permettono di aggiugner altro.

In vece, per quelli che fosser disposti per avventura a chieder ragione allo scrittore del suo silenzio, sulle utili loro fatiche e scoperte, a qualche sua scusa e difesa vaglia l' ingenua e aperta protesta ch' ei già non si è proposto di render conto di tutto; che gliene mancavano i mezzi; ch' ei non ha inteso che di additare, recandone un semplice saggio, i luoghi bisognosi di supplemento nello scritto francese; che in somma ei rispetta i diritti di ognuno, i quali rimangonsi intatti, e servir ponno a mettere in salvo ognora meglio quelli della Patria. Di questa per altro può dirsi che rifiuta le cosiffatte difese, nè vuole averne bisogno. Al qual proposito il celebre David Hume nella sua eccellente Storia d' Inghilterra osserva che l' Italia è sì ricca e sazia di gloria letteraria antica e moderna, che non tien cura, nè mostra di accorgersi che altri prenda il passo sopra di lei. A quelli, che ne mettessero in dubbio i vanti, forse il profondo e imparziale Storico e Filosofo risponderebbe = Ch' ella è sì gloriosa che non ode =.

A N N O T A Z I O N I

(Pag. XXI. Lin. 12) *Nel compendio che si esamina leggonsi le seguenti notabili parole = Borda e Cassini, recando alle osservazioni una precisione in tutto nuova, misurarono la lunghezza del pendolo, che batte i secondi a Parigi; onde ottenere il rapporto esatto di questo pendolo al metro =. Non ci si dice che alle fatiche corrispondesse l' esito. Pur sembra che sì; nel qual caso è d' uopo convenire che nel pendolo ci si offre una misura, la quale, ove nel corso degli anni sorga sospetto che qualche alterazione sia sopravvenuta ai Campioni del metro, può servire acconciamente a verificarlo; giacchè non si tratta più che di assicurarsi, impiegando le industrie e diligenze praticate da Borda e Cassini, se fra la lunghezza del mentovato pendolo e quella de' campioni su cui cade il dubbio, sussiste il rapporto scoperto. Questa operazione è senza confronto meno faticosa di quella di misurare di nuovo un arco del Meridiano. Più: poichè della lunghezza del pendolo a secondi in Parigi, come in qualunque altro parallelo, non ha dubbio che non sia stabile; e ch' essa inoltre conseguentemente al rapporto suo colla lunghezza del metro, è nota, a taluno parer potrebbe che fosse stato da prima miglior partito di assumerla come modulo e unità di ogni sorta misure. Così, preten-*

derà esso, si sarebbero evitate le ipotesi, delle quali rimane un tal poco infetta la scelta a quest' uso del metro; alla determinazione del quale si è giunto immaginando e supponendo che i gradi del Meridiano terrestre nel procedere dall' Equatore al Polo, crescano con una certa legge; mentre d'altra parte sembra certo soltanto ch' essi crescono, ma non si sa con qual legge; anzi i migliori al presente consentono che il Globo non debba riporsi fra le figure che appellansi di rivoluzione. Ma a che proposito, diranno alcuni, muovere questi scrupoli? Pel motivo unico che recandosi comunemente a quest' oggetto molta importanza, sembra che non sia dispregevole in tutto qualunque osservazione, la quale ad esso si riferisca.

(Pag. XXI. Lin. 24) *Malgrado la circospezione e la timidità quasi, con cui l' autore del discorso esprime in questo luogo, ci non pertanto nel lasciarsi cader dalla penna le nuove nomenclature, punto non istupirebbe che alcuno fra i Neochimici sorgesse a sgridarlo, e ad ammonirlo severamente che non debbe un profano arrogarsi di stendere la mano all' Arca. Tale presso di essi è la nuova nomenclatura, in cui al più al più è concesso ai conoscitori e agli Adepti d' introdurre qualche innovazione. E pure, poichè il nuovo linguaggio s' indirizza al Pubblico, pare che anche a un uom del popolo non debba essere in tutto*

disdetto di proporre qualche sua osservazione.

E per la prima, chi ne assicura, che conformemente ad una riflessione recata poco dopo nel discorso i nuovi mezzi offertici dal Piliere di Volta, di decomporre i corpi, non costringano i Chimici a riformare in più luoghi il loro linguaggio? A buon conto del principio dichiarato comunemente generatore degli acidi un valoroso Chimico inglese pretende che concorra alla formazione degli alcali. Ove la novità si ammetta, converrà che i Chimici risolvano di cangiar nome alla sostanza poco nota per vero dire, intanto che non manca chi si ostina a dichiararla ipotetica, alla quale si affrettarono d'imporre il nome di Ossigeno. Poichè le competerebbe egualmente quello di Alcaligeno, è probabile ch' essi ammoniti dall' esempio de' pericoli, a cui espone la fretta, si porranno in cerca di qualche altra proprietà del principio meglio opportuna all' intento. Ben vuolsi credere che rifiuteranno l' offerta seriamente forse, ma forse anche per ischerzo lor fatta della denominazione di Pantogeno. In secondo luogo non ha nome per quanto sembra, di cui gli autori del nuovo vocabolario più si mostrin contenti, quanto di quello da essi introdotto di calorico; riguardo a cui ponno in fatti essi pregiarsi del suffragio de' Fisici che in ciò d' accordo con essi non isdegnano di valersene. Sul qual proposito uno fra questi, degno senza dubbio quanto veruno di parlare a nome degli altri, in un
h

suo estratto inserito nella Biblioteca britannica, degli elementi fisici di Tiberio Cavallo si esprime come segue. = Il fuoco è la cagione che fra gli altri suoi effetti produce negli esseri animati quella sensazione indefinibile che si appella calore. Però i dotti Autori della Nomenclatura chimica francese, col chiamare questo elemento il calorico, gli hanno dato un nome soprammodo conveniente, che ne fa sovvenire di una delle sue più principali caratteristiche proprietà, avvisandoci nondimeno ch' esso già non la manifesta in ogni incontro, potendo, quand' anche non si prova sensibil calore, esister fuoco imbrigliato comunque e mascherato =. Davvero che questo tratto, chi non conoscesse d' altronde il nostro insigne Fisico e la ingenuità ed elevatezza de' suoi sentimenti, potrebbe muover sospetto che in esso anzi che l' apologia egli intenda di far la satira del termine calorico. Il ragionamento interpretato a rigore guida a questa conseguenza; che i Neochimici, poichè il fuoco può risvegliare la sensazione detta calore, hanno adoperato saviamente sostituendo il vocabolo calorico a quello di fuoco, e proscrivendo quest' ultimo: vuol dire che nell' opinione loro il Pubblico aveva mestieri d' essere avvertito che il fuoco scotta. Oh verrebbe pur voglia di esclamare = quantum est in rebus inane! = Benchè sono poi essi i Chimici e in genere anzi i Filosofi sì certi che presso il popolo e nella comune significazione del termine colla parola calore si

denoti la sensazione? o non piuttosto, come si è in altro luogo avvertito, nè si reputa inutile di ripetere, nel rimprovero fatto al popolo per parte de' filosofi rinchiudasi una vera calunnia? Eh che non ha uomo sì rozzo, il quale concepisca nella punta di un ago nulla di simile al dolore della puntura. Per simil modo esso non immagina nel fuoco nulla di conforme alla sensazione risvegliata dal calore; termine, che mettendo da parte e lasciando senza nome la sensazione, cui ben sa di non poter confondere con verun' altra, viene da esso impiegato sempre a denotar la cagione. Certo che nebbiose assai sono le idee, che di questa formasi il popolo. Esso ne abbandona la ricerca ai filosofi, de' quali bonariamente immagina che meglio la conoscano; in ciò forse onorandoli di troppo, e ignorando ch' essi all' opposto lo disprezzano al segno di supporre che confonda miseramente le proprie sensazioni colle cagioni, che le producono. Or se a queste e non alle prime vuolsi nel comun senso riferire il vocabolo calore, cessa ogni motivo o pretesto d' innovazione.

Anche un' altra osservazione: perchè si può chiedere ai Neochimici per quale dimenticaggine abbiano essi trascurato di arricchire il loro vocabolario de' termini a cagion d' esempio di odorico e di saporico. Adottandoli avrebbero tolto di mezzo lo sconcio secondo le loro idee inevitabile di valersi de' nomi di odore e sapore nel doppio significato di cagione e di effetto.

E a questo proposito si noti eziandio che ne' libri di Fisica e Chimica moderni ritiensi il nome di freddo e ritenendolo non si crede necessario di opporre verun riparo agli equivoci temuti per parte di quello di calore, di cui è desso reciproco. Agli autori anzi di questi libri non si crede disdetto di chieder ragione delle frequenti contraddizioni, che presso di essi s'incontrano fra le massime e la pratica. Come accade ch' essi inciammino sì spesso a valersi del termine calore nelle occasioni, in cui pare che quel di calorico dovesse preferirsi? Parlano essi non di rado del calore diretto, ripercolato, raccolto, raggianti, e nel farlo ben mostrano che hanno per ozioso il vocabolo calorico. Qualche difficile, e se così vuolsi, sofisticico, potrebbe anche pregurli a voler dirne per qual motivo siasi sostituito al vocabolo aria quello di gaz, o gas; del qual vocabolo ignobile e barbaro non si è avuto scrupolo di contaminare e imbarbarire la lingua, onde scorgasi vie meglio non avere in tutto il torto i Saggi, che gemono sul pericolo da essi temuto che un secolo dicentesi colto torni di galoppo alla barbarie.

Per ultimo non rincresca loro di mostrare i vantaggi inestimabili, si dice, della nuova nomenclatura, recandone la prova sopra ogni altra efficace a convertire gli increduli. Il miglior partito sembra quello di addurre qualche esempio di qualche alquanto importante scoperta dovuta unicamente al nuovo soccorso, ta-

le cioè che senza di esso non avrebbe potuto ottenersi. Così riusciranno essi a chiudere la bocca ai detrattori meglio assai che cogli encomii, de' quali sono larghi verso il nuovo vocabolario, di cui non cessano di predicare che esso per un suo privilegio porta scolpita l'impronta della reale composizione de' corpi. Non bastano di gran lunga questi encomii a tranquillare i timidi, i quali loderanno a cielo lo scopo, e dichiareranno l' assunto nobile, magnifico al maggior segno; ma ravviseranno in esso molti pericoli, quello fra gli altri e sopra gli altri di esporsi per avventura a mettere il suggello e dare una specie di sanzione alle ipotesi, innestandole sul linguaggio. Ma non serve di accumulare le osservazioni, quando in vece, come la Nota ha da principio avvertito, giova aspettar quelle più gravi assai, a cui schiuderà l'adito il Piliero di Volta.

(Pag. xxiv. Lin. 3) Da queste aggiunte informi e tumultuarie basterà conformemente allo scopo del Discorso estrarre uno o due esempj de' torti che in esse soffrono gl' Italiani, contro peraltro le intenzioni dell' Autore, a cui vuolsi render questa giustizia, ch' ei si mostra in ogni luogo per carattere e per massima equo verso tutti, e anzi verso noi annunzia una cotale parzialità, di cui conviene sapergli grado, senza che per questo siasi in obbligo di occultarne le inesattezze. Nell' ultimo tomo, a proposito della Nautica, egli, senza troppo por mente se la gravità della Storia e il

tenor conforme con cui debbe in essa procedere l'esposizione, tollerì quest' inframessa, non esita ad interporre una lista divisa secondo le varie nazioni in classi, de' Naviganti più rinomati. Fra gl' italiani notasi, manco mule, Colombo, e quegli che diede il nome all' America. Ma fra gl' inglesi, chi lo avrebbe sognato? s'incontra registrato il veneziano Cabotto. Questa svista ne fa sovvenire un' altra della stessa natura, nella quale inciampa l' autore dell' estratto inserito nella Biblioteca Britannica, degli elementi di fisica di Tiberio Cavallo. Questo Fisico napoletano è quivi battezzato per inglese e dichiarato compatriotto del Neuton. Non rincresca al dottissimo estrattista il cenno di un abbaglio che non dovea trovarsi in un giornale meritamente sì reputato; giacchè di simili lavori è lecito il dire ch'essi radunano notizie, onde fra gli altri fini a cui mirano, servire acconciamente alla storia delle scienze e de' loro coltivatori. Ma tornando alle aggiunte, nel primo tomo di esse, terzo dell' opera intera, s'incontra un tratto onorifico per gli Italiani. Di essi non senza encomii ci si narra che in alcune ricerche astrusse assai hanno coltivato egregiamente il metodo degli Antichi; intorno al quale giova osservar di passaggio, che mal a proposito viene appellato sintetico da quelli, che arrestandosi alla corteccia, poichè il calcolo non è in esso impiegato, sbagliano miseramente lo strumento pel metodo. Dopo gl' Italiani vengon gl' Inglesi, che non a

torto commendansi similmente. Poi dall' Inghilterra si torna sul Continente, dove l' autore è chiamato da Mr. Castillon, di cui si scorge palesamente che gli è ignota la patria. Senza ciò ci gli avrebbe dato luogo fra gli Italiani, nè avrebbe lasciato incerto a qual nazione appartenga; e ci avrebbe informati che il suo cognome di famiglia è Salvemini, da lui per un certo vezzo, o piuttosto per certi suoi speciali motivi, cangiato in quello di Castiglione sua patria, terra nobile posta nel cuor dell' Italia fra Arezzo e Cortona.

(Pag. xxv. Lin. 1) *Ritenendo la protesta fatta nel Discorso e dichiarando di nuovo che s' intende di mettere in tutto da banda la Chimica, chiedesi non per tanto licenza di collocare nella Nota presente una o due riflessioni, che ci si fanno incontro spontaneamente, suggerite dall' impresa lodevolissima a cui alcuni Valentuomini sonosi accinti, di applicare all'analisi de' corpi il Piliero di Volta. Della Chimica sembra lecito il dire, chi ne scorra di volo la storia, che ogni qual volta si è arricchita di qualche ingegno e artificio a decomporre i corpi dianzi non conosciuto, non solo ha prosperato immantinente, ma si è pur veduta sorgere in essa una specie di rivoluzione. Come son gli uomini disposti sempre a vagheggiare la perfezione, e a sognare agevolmente d' essere omai vicini a raggiugnerla, non è improbabile che si aprisse l' ani-*

mo a grandi speranze allorchè per l' invenzione de' lumbicchi e delle storte riuscirono i Chimici ad imprigionare e raccogliere le sostanze, che senza ciò dileguerebbero in forma di vapore. Ma comunque di ciò si opini, è certo che in niun' epoca si accesero essi di lusinghe più vive quanto a' nostri tempi in seguito della recente scoperta degli apparati pneumato-chimici, vale a dire de' mezzi, onde afferrare e padroneggiare que' fluidi sottili e fugaci che in più incontri, conseguentemente al conflitto reciproco e ai nuovi accoppiamenti de' principii de' corpi condotti ad agire gli uni su gli altri, se ne svincolano e ne prorompono in folla, assumendo congiuntamente la forma aerea. Non ha dubbio che questi fluidi non abbiano in ogni tempo fatta frequente mostra di se, ed è a gran torto che gli operatori intenti per l' addietro ad opporsi ai danni che dall' impetuosa loro energia per avventura sovrastavano ai vasi, entro de' quali sorgevano, costumavano di aprire ad essi uno sfogo, nè curavansi di esaminarli. Debbonsi all' opposto i maggiori encomii a que' prodi, che a' dì nostri coltivando felicemente questo nuovo ramo di Chimica sonosi procacciati un vero diritto alla riconoscenza della posterità, che ne sarà loro tenuta; quand' anche non ritenga tutte le idee sistematiche, per le quali si annunzian persuasi di avere omai sollevata l' Arte al grado e alla dignità di Scienza, traendola dall' abbiezione, in cui dianzi a loro avviso giacevasi, di un ignobile empirismo.

E a proposito delle idee sistematiche comunemente adottate non si reputa inutile di osservare che a questo carattere partecipa il nome stesso di Chimica pneumatica posto in fronte alla nuova dottrina. E' desso un nome che a rigore e per proprio significato compete alla raccolta delle notizie intorno alla costituzione delle arie. Ma nell' opinione de' Neochimici gli si da un senso più largo assai. Sono eglino persuasi d'essere per grande ventura della Scienza giunti a scoprire nelle arie i principii più semplici e più universali d'ogni maniera di Corpi, di cui son di parere che in esse annidino nella loro quasi assoluta ed elementare purezza, associati soltanto al principio igneo. In ciò è riposto siccome il perno, intorno a cui raggirasi la nuova dottrina, ed è riguardo alla fermezza e solidità di questo che propongonsi essi di consultare il Piliero di Volta non senza lusinga di ottenerne risposte che tronchino le dispute. Ben nell'impiego di questo nuovo strumento attivissimo, per cui con armi dianzi ignote vengono assaliti i corpi, e all'oggetto di svelarne l'intima composizione rivolta l'efficacia sovraggrande dell'agente elettrico, converrà ch'essi procedano con più ritegno, che non forse in addietro. I Fisici, co' quali pregiarsi di avere contratta lega, gli ammoniranno dell'obbligo di aver presente che non a torto fu dagli antichi Sapiienti simboleggiata la Natura nel Proteo della Favola; ch'essa sotto i lor occhi e fra le lor mani è pronta a

k

vestir mille forme e sembianze diverse, e a prender l'aspetto or il' aria, or il' acqua, or di fuoco; mentre di essi può temersi fondatamente che non di rado sbagli-no queste trasformazioni pe' chiari oràcoli e per le aperte risposte della medesima. Senza quest' avvertenza potrebbe accader loro di urtare in un abbaglio poco, se si osa dirlo, diverso da quello, che prende il Rustico, allorchè immagina che per una cotal virtù magica posseduta dal Giocolatore siasi convertito in un pulcino il pugno di miglio da lui poco prima veduto porsi sotto il bossolo. Non si adontino di grazia i Valentuomini di un confronto niente offensivo, chi rifletta che la sagacità loro, comechè grande, rimansi di un immenso intervallo al disotto della callidità ineffabile della Natura.

Non è improbabile che il nuovo ordine di ricerche guiderà i Chimici a riconoscere qualche più o men notabile composizione in molte sostanze dichiarate semplici, o a meglio dire, a non offendere la Logica, indecomposte. Delle cosiffatte sostanze il numero è oggi-mai grande oltremisura e cresce ogni dì più, talmente che qualche difficile e poco disposto ad ammettere tanta moltitudine di esseri tali forse ne inferirebbe che una scienza la quale confessa di non posseder mezzi onde chiarirsi almeno se i corpi la più parte siano semplici o composti, o si arroga di assumere un nome che non le compete, o trovasi tuttavia in uno stato d'infanzia.

Benchè, questo difficile potrebbe prender coraggio e chiedere inoltre se sieno poi essi sì certi di non avere in più incontri decomposti realmente que' corpi stessi che dichiaran restii ad ogni scomposizione. Chi sa che a tenerla loro nascosta non concorrano per avventura le idee sistematiche da essi adottate? Trattasi ne' casi qualunque di spiegare acconciamente certi fenomeni sensibili. Certo che ne rendono essi quanto basta ragione, ritenendo che molte sostanze non soffrano niuna decomposizione. Ma se ben si mira, riescono all'intento impiegando la scomposizione di qualche altra sostanza, dell' acqua fra le altre e sopra le altre, che molto opportunamente al loro uopo rinvencono per ogni dove. Nè già si mette in dubbio che le interpretazioni non sieno plausibili. Solo si avverte che per l'una parte la logica rigorosa ne imporrebbe di astenersi dal proferire che i corpi soggetti alle sperienze rimangansi indecomposti, e la comparsa delle sostanze, che veggonsi emergere, debbasi unicamente alla decomposizione dell' acqua, e per l'altra che questo appunto pare uno di que' luoghi numerosissimi, su i quali promette qualche lume il piliere di Volta. A nodrir le lusinghe concorrono le sperienze recenti, che al presente traggono a se gli occhi di tutti, dell' inglese Dawy. A proposito anzi di questo eccellente chimico forse alla storia della scienza e a quella pure dello spirito umano non è in tutto inutile di osservare che la

congettura di Watt, e di Cavendish sull' indole composta dell' acqua, che sarebbe forse perita nel nascere, ebbe fortuna migliore in Francia, dove Lavoisier adottandola e incorporandola al suo sistema le procacciò gli applausi e il favore universale quasi de' chimici, intanto che n' ha pur pochi che non la tengano per una verità dimostrata per analisi, si dice, e per sintesi. Questo singolare incidente commosse finalmente gl' inglesi a cogliere le opportunità di rivendicare alla propria nazione il merito e il diritto alla scoperta. In fatti Dawy fra gli altri abbattendosi a parlarne non esita ad appellarla la grande scoperta di Cavendish.

Concedasi per ultimo alla nota di aprire un suo desiderio. Di questa proposizione quanto niun' altra fondamentale della nuova chimica è noto che a dispetto del favor generale da essa ottenuto non manca chi rifiuta di ammetterla, movendole difficoltà, delle quali non può non bramarsi che venga concludentemente mostrata l' insussistenza. E lasciando stare gli ultimi attacchi o vigorosi o violenti che debban dirsi, di Sigorgne, ben sembra che non debbano disprezzarsi quelli con cui si accinse a combatterla l' autore illustre dell' introduzione alla fisica terrestre. È vero che a proteggerla sorse a nome per così dir della scuola l' estensore dell' estratto dell' opera mentovata che leggesi nella Biblioteca francese e negli Annali chimici di Parigi. Ma è vero altresì che il grande Fisico di

Ginevra inserì in questi stessi annali una sua risposta, la quale per l'una parte potrebbe a taluno parere robusta, mentre per l'altra non senza qualche sorpresa rimansi tuttavia senza replica.

(Pag. xxix. Lin. 3) *Nè solo nella indagine fisica sopra i colori ci si fa toccare con mano non essere l'occhio, qual lo immaginava l'Eulero, uno strumento acromatico; ma la nuova prova recatane non è che una conferma e illustrazione di quella non meno robusta, con cui già tempo nel terzo tomo della Società Italiana il nostro illustre Collega sorse il primo a combattere la supposizione del sommo Matematico svizzero. Intorno a che per un fenomeno singolare quasi non è inutile d'osservare che l'Eulero, comechè partisse da un duto meno che giusto, e prendesse inoltre qualche altro abbaglio, indovinò nondimeno il rimedio e segreto, onde togliere ai canocchiali un vizio da Neuton dichiarato immedicabile. Ma ciò mettendo da parte, è meglio in vece osservare che il diritto di priorità compete al nostro Fisico per ogni titolo. Non certo valgono ad indebolirlo i meri dubbii e privi del carattere di prove dirette mossi all'Eulero dal celebre Dalember. D'altra parte gli argomenti più fondati che contro la mentovata prerogativa dell'occhio leggonsi presso il sig. Blair nelle Transazioni edimburghesi furono di qualche anno preceduti dalla prova pur ora*

citata inserita nelle Memorie della Società Italiana. Non si è creduto inutile come di toccare di volo nel Discorso, così di ripetere alquanto più estesamente in questa nota un fatto appartenente all'occhio e alla teoria quanto niun'altra importante, della luce e della visione. Il perchè si pena alquanto a comprendere come accada che libri anche recentissimi, quali riferiscano nudamente il ragionamento dell' Eulero, quali si mostrin disposti a crederlo giusto. Eppure a rendere agli autori loro sospetto alcun poco il supposto privilegio dell'occhio bastava forse una riflessione assai semplice. De' canocchiali acromatici è noto che l'artefice per solito è contento di correggere il vizio della lente obiettiva. Ei si crede lecito di trascurar quello, comechè lasciandolo senza rimedio, reale e inevitabile, della oculare: nè in ciò non ha torto interamente; giacchè pel breve tragitto de' raggi, la separazione di questi cade entro i limiti che l'occhio può soffrirli impunemente e senza che attorno all'oggetto veduto compariscano frange vario-colorate. Il fenomeno in fatti, sia l'occhio o non sia fornito della mentovata prerogativa, pare che non ammetta che quest'unica spiegazione; la quale conseguentemente può applicarsi a quella tenue divisione qualunque che i raggi soffrono per avventura nell'attraversare gli umori dell'occhio. Potrà dunque questo far senza comodamente della facoltà di riunire i raggi; e la natura che non fa nulla

indarno poteva lasciarnelo privo nella visione ordinaria, a cui era dessa soltanto tenuta di provvedere. Ma non serve di porsi a puntellare una sentenza appoggiata solidamente alle sperienze decisive del nostro Collega .

Si rammemori piuttosto un altro suo merito verso l' Ottica , e nel farlo si supplisca ad una omissione del Discorso. In questo non senza motivo fu detto che l' analisi della luce istituita co' metodi descritti nella Indagine fisica de' colori , a certi riguardi sorpassa nella esattezza quella che può effettuarsi col prisma. In essa ci si offrono nuovi argomenti, onde cessar finalmente ogni disputa sul numero de' colori primitivi, e impor silenzio a quelli che di fresco anche e fra gli stessi Inglesi sono comparsi a sostenere doversi restringere a tre sole le sette specie alle quali Neuton ridusse i colori senza numero rinchiusi in ogni raggio qual giugne a noi scagliato dal sole. Fra questi vuolsi annoverare l' irlandese sig. Matteo Young; a cui sembra probabile che non convenga riconoscere per semplici e primitivi che tre colori, il rosso, il giallo, l' azzurro; e a fin di fissare le idee, del verde opina che debbasi all' accoppiamento de' raggi giulli e azzurri, fra i quali egli suppone che n' abbia sempre parecchi capaci di un egual grado di rifrazione, per cui sì gli uni che gli altri vengano piegati verso il mezzo dello spettro prismatico là dove fa mostra di se il color verde.

Certo che ammessa questa supposizione divengono inutili i tentativi, ai quali i fautori del Newton costumavano di ricorrere, tratti dalla rifrazione o dalla riflessione. E' giuoco forza impiegare all' uopo la trasmissione. E bene; permetta il sig. Young che gli si additino alcuni esperimenti del nostro Venturi e venga pregato a ripetergli; quello a cagion d' esempio, in cui la luce è costretta a filtrarsi prima per una soluzione allungata a un certo grado, di rame nell' ammoniaca, poi per un' altra similmente a un certo grado diluita di gomma gotta, acqua e alcool. La prima intercetta il color giallo; la seconda l' azzurro. Secondo i suoi principii il verde dovrebbe sparire. Or gli si osa annunziare ch' esso si scorgerà limpido e puro, e colla sua presenza lo convincerà ch' esso nell' emerger dal sole non è altrimenti composto de' due primi, ed è quanto questi omogeneo e primitivo.

M E M O R I E
DELLA CLASSE
DI FISICA E MATEMATICA

FINE DEGLI ELEMENTI

Di Trigonometria Sferoidica

D I B A R N A B A O R I A N I

Presentato in novembre 1866

P R O B L E M A VII

104. **D**ati nel triangolo sferoidico elittico i tre elementi λ , ϕ , ϖ trovare l'angolo ζ .

S O L U Z I O N E I

Sieno λ' , ϕ' le latitudini sulla sfera inscritta corrispondenti alle latitudini date λ , ϕ , e facciamo per brevità

$$\sigma = \beta_0 \cdot (V - V') + 2 \beta_1 \cdot [1] + 2 \beta_2 \cdot [2] + \text{ec.}$$

l'equazione XVI diventerà $\varpi + \sigma = Z - Z'$, da cui si otterrà come sopra (§ 95)

$$\cos \zeta \operatorname{sen}(\varpi + \sigma) + \operatorname{sen} \zeta \operatorname{sen} \lambda' \cos(\varpi + \sigma) = \operatorname{sen} \zeta \cos \lambda' \operatorname{tang} \phi'$$

$$\text{Sarà per conseguenza } \operatorname{tang} \zeta = \frac{\operatorname{sen}(\varpi + \sigma)}{\cos \lambda' \operatorname{tang} \phi' - \operatorname{sen} \lambda' \cos(\varpi + \sigma)}.$$

Pongasi ora $\varpi + \sigma = u$; e sia $\sigma = \phi u$, avremo l'equazione

$$0 = \varpi - u + \phi u$$

dalla quale ricaveremo (§§ 43, 44)

$$u = \varpi + \phi \varpi + \frac{d \cdot (\phi u)^2}{2 du} + \frac{d^2 \cdot (\phi u)^3}{2 \cdot 3 du^2} + \text{ec.}$$

avvertendo di mettere nel secondo membro di quest'equazione ϖ in luogo di u dopo tutte le differenziazioni. I termini $\frac{d \cdot (\phi u)^2}{2 du}$, $\frac{d^2 \cdot (\phi u)^3}{2 \cdot 3 du^2}$, ec.

si otterranno facilmente, poichè sarà in generale

$$\begin{aligned} \frac{d(\phi u)^m}{du} = 2m(\phi u)^{m-1} \cdot \left(\frac{d\zeta}{du} \right) & \left(\frac{1}{2} (V - V') \frac{d\beta_0}{d\zeta} + [1] \frac{d\beta_1}{d\zeta} + [2] \frac{d\beta_2}{d\zeta} + \text{ec.} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \beta_0 \cdot \frac{d(V - V')}{d\zeta} + \beta_1 \cdot \frac{d[1]}{d\zeta} + \beta_2 \cdot \frac{d[2]}{d\zeta} + \text{ec.} \right) \end{aligned}$$

e dalla precedente equazione $\cot \zeta \operatorname{sen} u + \operatorname{sen} \lambda' \cos u = \cos \lambda' \operatorname{tang} \phi'$ si ha

$$\frac{d\zeta}{du} = \operatorname{sen} \zeta \cos \zeta \cot u - \operatorname{sen} \zeta^2 \operatorname{sen} \lambda'$$

Dunque tanto $\frac{d(\Phi u)^m}{du}$ quanto $\frac{d^2(\Phi u)^m}{du^2}$, $\frac{d^3(\Phi u)^m}{du^3}$, ec.

si potranno sempre determinare colla semplice differenziazione, giacchè sono funzioni delle variabili ζ , u e delle costanti λ' , ϕ' . Dal valore poi di u si dedurrà l'angolo ζ mediante l'equazione

$$\text{tang } \zeta = \frac{\text{sen } u}{\cos \lambda' \text{ tang } \phi' - \text{sen } \lambda' \cos u}$$

105. Propongasi, per esempio, di trovare l'angolo ζ per mezzo dei tre elementi λ' , ϕ' , π , neglimentando la sesta e le più alte potenze dell'eccentricità. Avremo

$$\Phi u = \sigma = \left[\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2^4} (1 + \text{sen } p'^2) \right] (V - V') \text{sen } p' + \frac{e^4}{2^4} \text{sen } p' \cos p'^2. [1]$$

$$(\Phi u)^2 = \frac{e^4}{2^2} (V - V')^2 \text{sen } p'^2$$

$$\frac{d \cdot (\Phi u)^2}{2 du} = \frac{e^4}{2^2} (V - V') \text{sen } p'^2 \cdot \left(\frac{d \zeta}{du} \right) \left[\frac{V - V'}{\text{sen } p'} \cdot \frac{d \cdot \text{sen } p'}{d \zeta} + \frac{d(V - V')}{d \zeta} \right]$$

Ma si è già trovato (§ 73)

$$\frac{d \cdot \text{sen } p'}{d \zeta} = \text{sen } p' \cot \zeta; \quad \frac{d(V - V')}{d \zeta} = \text{tang } p'^2 \cot \zeta (\text{tang } V - \text{tang } V')$$

$$= \frac{\text{tang } p'^2 \cot \zeta \text{sen } (V - V')}{\cos V \cos V'};$$

mettendo pertanto π in luogo di u , e supponendo l'angolo H tale, che si abbia

$$\text{tang } H = \frac{\text{sen } \pi}{\cos \lambda' \text{ tang } \phi' - \text{sen } \lambda' \cos \pi}; \text{ fatto inoltre per brevità}$$

$$A = \frac{d\zeta}{du} = \frac{dH}{d\varpi}, \text{ sarà}$$

$$\frac{d(\sin u)^2}{2 \frac{du}{du}} = \frac{e^4}{2^3} A(V-V') \operatorname{sen} p'^2 \left[V-V' + \operatorname{tang} p'^2 \frac{\operatorname{sen}(V-V')}{\cos V \cos V'} \right] \cot H$$

ed il calcolo dell'angolo ζ si potrà disporre come segue

$$1) \operatorname{tang} H = \frac{\operatorname{sen} \varpi}{\cos \lambda' \operatorname{tang} \phi' - \operatorname{sen} \lambda' \cos \varpi}$$

$$2) \quad A = \operatorname{sen} H (\cos H \cot \varpi - \operatorname{sen} H \operatorname{sen} \lambda')$$

$$3) \operatorname{sen} p' = \operatorname{sen} H \cos \lambda'$$

$$4) \operatorname{sen} V' = \frac{\operatorname{sen} \lambda'}{\cos p'}$$

$$5) \operatorname{sen} V = \frac{\operatorname{sen} \phi'}{\cos p'}$$

$$6) u = \varpi + \left[\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2^3} (1 + \operatorname{sen} p'^2) \right] (V-V') \operatorname{sen} p' + \frac{e^4}{2^4} \operatorname{sen} p' \cos p'^2 \cdot [1] \\ + \frac{e^4}{2^2} A(V-V') \cot H \operatorname{sen} p'^2 \left[V-V' + \operatorname{tang} p'^2 \frac{\operatorname{sen}(V-V')}{\cos V \cos V'} \right]$$

$$7) \operatorname{tang} \zeta = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos \lambda' \operatorname{tang} \phi' - \operatorname{sen} \lambda' \cos u}$$

S O L U Z I O N E 2

106. Ritenendo le due equazioni della prima so-

$$\text{luzione, cioè } \operatorname{tang} \zeta = \frac{\operatorname{sen} (\varpi + \sigma)}{\cos \lambda' \operatorname{tang} \phi' - \operatorname{sen} \lambda' \cos (\varpi + \sigma)};$$

$$\operatorname{tang} H = \frac{\operatorname{sen} \varpi}{\cos \lambda' \operatorname{tang} \phi' - \operatorname{sen} \lambda' \cos \varpi}, \text{ e posto } a = \frac{d \cdot \operatorname{tang} H}{d \varpi};$$

$$b = \frac{d^2 \cdot \text{tang } H}{d \varpi^2}; c = \frac{d^3 \cdot \text{tang } H}{d \varpi^3}; \text{ec. ed in oltre}$$

$$\Phi \zeta = a \cdot \sigma + \frac{b \cdot \sigma^2}{2} + \frac{c \cdot \sigma^3}{2 \cdot 3} + \text{ec. avremo l'equazione}$$

$$0 = \text{tang } H - \text{tang } \zeta + \Phi \zeta$$

Quindi facendo come sopra (§ 90)

$$\frac{d[(\Phi \zeta)^m \cos \zeta^2]}{d \zeta} = (\Phi' \zeta)^m; \frac{d[(\Phi' \zeta)^m \cos \zeta^2]}{d \zeta} = (\Phi'' \zeta)^m; \frac{d[(\Phi'' \zeta)^m \cos \zeta^2]}{d \zeta} = (\Phi''' \zeta)^m; \text{ec.}$$

otterremo

$$\zeta = H + \Phi H \cdot \cos H^2 + \frac{(\Phi' \zeta)^2 \cdot \cos H^2}{2} + \frac{(\Phi'' \zeta)^3 \cdot \cos H^2}{2 \cdot 3} + \text{ec.}$$

avvertendo di mettere in $(\Phi' \zeta)^2$, $(\Phi'' \zeta)^3$, ec. dopo le differenziazioni H in vece di ζ .

107. Limitandoci all'esempio precedente in cui omettonsi le potenze dell'eccentricità superiori alla quarta, avremo $\Phi \zeta = a \cdot \sigma + \frac{b \cdot \sigma^2}{2}$, vale a dire

$$\Phi \zeta = \left[\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2^4} (1 + \text{sen } p'^2) \right] a (V - V') \text{sen } p'$$

$$+ \frac{e^4}{2^4} a \text{sen } p' \cos p'^2 \cdot [1] + \frac{e^4}{2^3} b (V - V')^2 \text{sen } p'^2$$

$$(\Phi \zeta)^2 = \frac{e^4}{2^2} a^2 (V - V')^2 \text{sen } p'^2$$

$$(\Phi' \zeta)^2 = \frac{d[(\Phi \zeta)^2 \cos \zeta^2]}{d \zeta} = -\frac{e^4}{2} a^2 (V - V')^2 \text{sen } p'^2 \text{sen } \zeta \cos \zeta$$

$$+ \frac{e^4}{2} a^2 (V - V') \text{sen } p'^2 \cos \zeta \left[\frac{V - V'}{\text{sen } p'} \cdot \frac{d \cdot \text{sen } p'}{d \zeta} + \frac{d(V - V')}{d \zeta} \right]$$

sostituendo i valori (§ 105) di $\frac{d \cdot \text{sen } p'}{d \zeta}$, $\frac{d(V-V')}{d \zeta}$;

e facendo $A = \frac{d H}{d \varpi}$; $B = \frac{d d H}{d \varpi^2}$, cosicchè abbiassi

$$a = \frac{A}{\cos H^2}; \quad b = \frac{B + 2 A^2 \text{ tang } H}{\cos H^2}, \quad \text{l'equazione}$$

$$\zeta = H + \Phi H \cdot \cos H^2 + \frac{(\Phi' \zeta)^2 \cdot \cos H^2}{2} \quad \text{risulterà}$$

$$\begin{aligned} \zeta = H + \left[\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2^4} (1 + \text{sen } p'^2) \right] A (V - V') \text{sen } p' + \frac{e^4}{2^4} A \text{sen } p' \cos p'^2 \cdot [1] \\ + \frac{e^4}{2^3} B (V - V')^2 \text{sen } p'^2 + \frac{e^4}{2^2} A^2 (V - V') \cot H \text{sen } p'^2 (V - V' \\ + \text{tang } p'^2 \frac{\text{sen } (V - V')}{\cos V \cos V'}) \end{aligned}$$

le quantità H, A, p', V', V si avranno dalle cinque formole precedenti (§ 105), e B dalla formola

$$B = A (\cos 2 H \cot \varpi - \text{sen } 2 H \text{sen } \lambda') - \frac{\text{sen } 2 H}{2 \text{sen } \varpi^2}.$$

108. Tenghiamo conto solamente del quadrato dell'eccentricità; sarà

$$\zeta = H + \frac{e^2}{2} A (V - V') \text{sen } p'$$

Volendo poi rendere quest'espressione indipendente dalla sfera inscritta, si prenderà un angolo h tale che sia

$$\text{tang } h = \frac{\text{sen } \varpi}{\cos \lambda \text{ tang } \varphi - \text{sen } \lambda \cos \varpi}. \quad \text{Ora } h \text{ diventa } H \text{ quan-}$$

do in h si mettono λ' , ϕ' in luogo di λ , ϕ ; ed essendo (§ 33)

$$\lambda' = \lambda - \frac{e^2}{2} \operatorname{sen} 2\lambda; \phi' = \phi - \frac{e^2}{2} \operatorname{sen} 2\phi, \text{ si avrà}$$

$$H = h - \frac{e^2}{2} \left[\left(\frac{dh}{d\lambda} \right) \operatorname{sen} 2\lambda + \left(\frac{dh}{d\phi} \right) \operatorname{sen} 2\phi \right] = h + \frac{e^2}{2} \operatorname{sen} 2h \cos \lambda^2.$$

In luogo delle quantità p' , $V - V'$, A già moltiplicate in e^2 si metterà rispettivamente p , $v - v'$, $\operatorname{sen} h \cos h \cot \varpi - \operatorname{sen} h^2 \operatorname{sen} \lambda$, e l'ordine del calcolo di ζ per mezzo dei tre elementi λ , ϕ , ϖ sarà

$$1) \operatorname{tang} h = \frac{\operatorname{sen} \varpi}{\cos \lambda \operatorname{tang} \phi - \operatorname{sen} \lambda \cos \varpi}$$

$$2) \operatorname{sen} p = \operatorname{sen} h \cos \lambda$$

$$3) \operatorname{sen} v' = \frac{\operatorname{sen} \lambda}{\cos p}$$

$$4) \operatorname{sen} v = \frac{\operatorname{sen} \phi}{\cos p}$$

$$5) \zeta = h + \frac{e^2}{4} \operatorname{sen} 2h \cos \lambda \left[\cos \lambda + (v - v')(\cot \varpi - \operatorname{sen} \lambda \operatorname{tang} h) \operatorname{sen} h \right]$$

109. Facendo uso dell'equazione primitiva (§§ 25, 27), la quale, neglimentando la quarta e le più alte potenze dell'eccentricità, e ritenendo il valore di ε (§ 101,) si riduce a $\varpi + \Sigma = z - z'$, otterremmo un'altra espressione di ζ indipendente dalla sfera inscritta, cioè

$$\zeta = h + \Sigma \cdot \left(\frac{dh}{d\varpi} \right), \text{ ossia}$$

$$\zeta = h + \frac{e^2}{4} \operatorname{sen} h \operatorname{sen} 2h \cos \lambda (\cot \varpi - \operatorname{sen} \lambda \operatorname{tang} h) \left[v - v' + \frac{\operatorname{sen}(v - v') \cos v'}{\cos v} \right]$$

e si potrebbe agevolmente mostrare l'identità di questo valore di ζ col precedente (§ 103).

P R O B L E M A VIII

110. Dati nel triangolo sferoidico elittico i tre elementi ϕ , ζ , ϖ trovare la latitudine λ .

S O L U Z I O N E 2

Dicansi ϕ' , λ' le latitudini nella sfera inscritta corrispondenti a ϕ , λ , e ritengasi il valore di σ come nel problema VI, si avrà l'equazione (§ 95)

$$\begin{aligned} \cot \zeta \operatorname{sen}(\varpi + \sigma) &= \operatorname{tang} \phi' \cos \lambda' - \cos(\varpi + \sigma) \operatorname{sen} \lambda' \\ &= \frac{\operatorname{tang} \phi' (1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \lambda'^2) - 2 \cos(\varpi + \sigma) \operatorname{tang} \frac{1}{2} \lambda'}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \lambda'^2} \end{aligned}$$

d'onde si ricava

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \lambda' = \frac{-\operatorname{sen} \zeta \cos \phi' \cos(\varpi + \sigma) \pm \sqrt{[\operatorname{sen} \zeta^2 - \cos \phi'^2 \operatorname{sen}(\varpi + \sigma)^2]}}{\operatorname{sen} \zeta \operatorname{sen} \phi' + \cos \zeta \cos \phi' \operatorname{sen}(\varpi + \sigma)}$$

Ponendo ora $u = \varpi + \sigma = \varpi + \phi u$, otterremo (§§ 43, 44)

$$u = \varpi + \phi \varpi + \frac{d(\phi u)^2}{2 \frac{d}{du}} + \frac{d^2(\phi u)^3}{2.3 \frac{d^2}{du^2}} + \text{ec.}$$

purchè dopo le differenziazioni si ponga ϖ in luogo di u ne' termini $\frac{d(\phi u)^2}{2 \frac{d}{du}}$, $\frac{d^2(\phi u)^3}{2.3 \frac{d^2}{du^2}}$, ec. Avremo in seguito

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \lambda' = \frac{-\operatorname{sen} \zeta \cos \phi' \cos u \pm \sqrt{(\operatorname{sen} \zeta^2 - \cos \phi'^2 \operatorname{sen} u^2)}}{\operatorname{sen} \zeta \operatorname{sen} \phi' + \cos \zeta \cos \phi' \operatorname{sen} u};$$

e finalmente alla latitudine λ' si troverà (§ 33) la sua corrispondente λ nello sferoide.

111. Propongasi, per esempio, di determinare λ' co' tre elementi ϕ' , ζ , π nel caso che si trascurino le potenze dell'eccentricità superiori alla quarta, avremo (§ 67)

$$\Phi u = \sigma = \left[\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2^4} (1 + \operatorname{sen} p'^2) \right] (V - V') \operatorname{sen} p' + \frac{e^4}{2^4} \operatorname{sen} p' \cos p'^2. [1]$$

$$(\Phi u)^2 = \frac{e^4}{2^2} (V - V')^2 \operatorname{sen} p'^2$$

$$\frac{d(\Phi u)^2}{2 \, d u} = \frac{e^4}{2^2} (V - V') \operatorname{sen} p'^2 \cdot \left(\frac{d \lambda'}{d u} \right) \left[\frac{V - V'}{\operatorname{sen} p'} \cdot \frac{d \operatorname{sen} p'}{d \lambda'} + \frac{d(V - V')}{d \lambda'} \right]$$

Ma abbiamo già trovato (§ 30)

$$\frac{d \operatorname{sen} p'}{d \lambda'} = -\operatorname{sen} p' \operatorname{tang} \lambda'; \quad \frac{d(V - V')}{d \lambda'} = -\frac{\operatorname{tang} \lambda'}{\cos p'^2} (\operatorname{sen} p'^2 \operatorname{tang} V + \cot V')$$

e dall'equazione precedente

$$\cot \zeta = \frac{\operatorname{tang} \phi' \cos \lambda' - \operatorname{sen} \lambda' \cos u}{\operatorname{sen} u} \quad \text{si ha}$$

$$\frac{d \lambda'}{d u} = \frac{\operatorname{tang} \lambda' - \operatorname{tang} \phi' \cos u}{\operatorname{sen} u (\operatorname{tang} \lambda' \operatorname{tang} \phi' + \cos u)}.$$

Supponendo pertanto che λ' diventi L' quando si mette

π in luogo di u , e facendo per brevità $A = \frac{d L'}{d \pi}$,

ne risulteranno le seguenti formole per calcolare la latitudine λ' :

$$1) \quad \operatorname{tang} \frac{1}{2} L' = \frac{-\operatorname{sen} \zeta \cos \phi' \cos \pi \pm \sqrt{(\operatorname{sen} \zeta^2 - \cos \phi'^2 \operatorname{sen} \pi^2)}}{\operatorname{sen} \zeta \operatorname{sen} \phi' + \cos \zeta \cos \phi' \operatorname{sen} \pi}$$

$$2) \quad A = \frac{\operatorname{tang} L' - \operatorname{tang} \phi' \cos \pi}{\operatorname{sen} \pi (\operatorname{tang} L' \operatorname{tang} \phi' + \cos \pi)}$$

$$3) \quad \text{sen } p' = \text{sen } \zeta \cos L'$$

$$4) \quad \text{sen } V' = \frac{\text{sen } L'}{\cos p'}$$

$$5) \quad \text{sen } V = \frac{\text{sen } \Phi'}{\cos p'}$$

$$6) \quad u = \pi + \left[\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2^4} (1 + \text{sen } p'^2) \right] (V - V') \text{sen } p' + \frac{e^4}{2^4} \text{sen } p' \cos p'^2 \cdot [1] \\ - \frac{e^4}{2^4} A(V - V')^2 \text{tang } L' \text{sen } p'^2 - \frac{e^4}{2^4} A(V - V') \text{tang } L' \text{tang } p'^2 (\text{sen } p'^2 \text{tan } V + \cot$$

$$7) \quad \text{tang } \frac{1}{2} \lambda' = \frac{-\text{sen } \zeta \cos \Phi' \cos u \pm \sqrt{(\text{sen } \zeta^2 - \cos \Phi'^2 \text{sen } u^2)}}{\text{sen } \zeta \text{sen } \Phi' + \cos \zeta \cos \Phi' \text{sen } u}$$

S O L U Z I O N E 2

112. Conservando i valori di σ ; $\text{tang } \frac{1}{2} L'$; $\text{tang } \frac{1}{2} \lambda'$ stabiliti nella soluzione prima, pongasi

$$a = \frac{d \cdot \text{tang } \frac{1}{2} L'}{d \varpi}; \quad b = \frac{d^2 \cdot \text{tang } \frac{1}{2} L'}{d \varpi^2}; \quad c = \frac{d^3 \cdot \text{tang } \frac{1}{2} L'}{d \varpi^3}; \quad \text{ec.}$$

e di più

$$\Phi \lambda' = a \cdot \sigma + b \cdot \frac{\sigma^2}{2} + c \cdot \frac{\sigma^3}{2 \cdot 3} + \text{ec.}$$

avremo l'equazione $0 = \text{tang } \frac{1}{2} L' - \text{tang } \frac{1}{2} \lambda' + \Phi \lambda'$, la quale ci darà (§ 81)

$$\lambda' = L' + 2\Phi L' \cdot \cos \frac{1}{2} L'^2 + \frac{2^2 (\Phi' \lambda')^2 \cdot \cos \frac{1}{2} L'^2}{2} + \frac{2^3 (\Phi'' \lambda')^3 \cdot \cos \frac{1}{2} L'^2}{2 \cdot 3} + \text{ec.}$$

purchè si ponga in $(\Phi' \lambda')^2$, $(\Phi'' \lambda')^3$, $(\Phi''' \lambda')^4$, ec. dopo tutte le differenziazioni L' in luogo di λ' .

113. Prendiamo lo stesso esempio, in cui si om-

mettono la sesta e le più alte potenze dell' eccentricità, sarà $\Phi \lambda' = a \cdot \sigma + b \cdot \frac{\sigma^2}{2}$, vale a dire

$$\Phi \lambda' = \left[\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2^4} (1 + \operatorname{sen} p'^2) \right] a (V - V') \operatorname{sen} p' \\ + \frac{e^4}{2^4} a \operatorname{sen} p' \cos p'^2 \cdot [1] + \frac{e^4}{2^3} b (V - V')^2 \operatorname{sen} p'^2$$

$$(\Phi \lambda')^2 = \frac{e^4}{2^2} a^2 (V - V')^2 \operatorname{sen} p'^2$$

$$(\Phi' \lambda')^2 = \frac{d[(\Phi \lambda')^2 \cdot \cos \frac{1}{2} \lambda'^2]}{d \lambda'} = -\frac{e^4}{2^2} a^2 (V - V')^2 \operatorname{sen} p'^2 \cos \frac{1}{2} \lambda'^2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \lambda' \\ + \frac{e^4}{2} a^2 (V - V') \operatorname{sen} p'^2 \cos \frac{1}{2} \lambda'^2 \left[\frac{V - V'}{\operatorname{sen} p'} \cdot \frac{d \operatorname{sen} p'}{d \lambda'} + \frac{d(V - V')}{d \lambda'} \right]$$

ovvero (§ III)

$$(\Phi' \lambda')^2 = -\frac{e^4}{2^2} a^2 (V - V')^2 \operatorname{sen} p'^2 \cos \frac{1}{2} \lambda'^2 (2 \operatorname{tang} \lambda' + \operatorname{tang} \frac{1}{2} \lambda') \\ - \frac{e^4}{2} a^2 (V - V') \operatorname{tang} p'^2 \cos \frac{1}{2} \lambda'^2 \operatorname{tang} \lambda' (\operatorname{sen} p'^2 \operatorname{tang} V + \cot V')$$

Ponghiamo ora L' in luogo di λ' , e facciamo

$$A = \frac{d L'}{d \varpi}; \quad B = \frac{d d L'}{d \varpi^2}; \quad \text{d'onde si ha } a = \frac{A}{2 \cos \frac{1}{2} L'^2};$$

$$b = \frac{B + A^2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} L'}{2 \cos \frac{1}{2} L'^2}; \quad \text{l'equazione } \lambda' = L' + 2 \Phi L' \cos \frac{1}{2} L'^2$$

$$+ \frac{2^2 (\Phi' \lambda')^2 \cdot \cos \frac{1}{2} L'^2}{2} \text{ si cangerà in}$$

$$\begin{aligned} \lambda' = L' + & \left[\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2^4} (1 + \operatorname{sen} p'^2) \right] A(V-V') \operatorname{sen} p' + \frac{e^4}{2^4} A \operatorname{sen} p' \cos p'^2 \cdot [1] \\ & + \frac{e^4}{2^2} (V-V')^2 \operatorname{sen} p'^2 (B - 2 A^2 \operatorname{tang} L') \\ & - \frac{e^4}{2^2} A^2 (V-V') \operatorname{tang} p'^2 \operatorname{tang} L' (\operatorname{sen} p'^2 \operatorname{tang} V + \cot V') \end{aligned}$$

Le quantità L' , A , p' , V' , V sono state sopra (§ 111) determinate, e B si avrà dalla formola

$$B = \frac{\operatorname{tang} \varphi' + 2 A \operatorname{sen} \varpi - A^2 (\operatorname{tang} \varphi' + \operatorname{tang} L' \cos \varpi)}{\operatorname{tang} L' \operatorname{tang} \varphi' + \cos \varpi}$$

114. L' equazione $\lambda' = L' + \frac{e^2}{2} A(V-V') \operatorname{sen} p'$,

che contiene solamente il quadrato dell' eccentricità, si può rendere indipendente dalla sfera inscritta, prendendo l'angolo L in maniera che si abbia

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} L = \frac{-\operatorname{sen} \zeta \operatorname{sen} \varphi \cos \varpi \pm \sqrt{(\operatorname{sen} \zeta^2 - \cos \varphi^2 \operatorname{sen} \varpi^2)}}{\operatorname{sen} \zeta \operatorname{sen} \varphi + \cos \zeta \cos \varphi \operatorname{sen} \varpi};$$

e siccome L diventa L' quando in L si mette

$$\varphi' = \varphi - \frac{e^2}{2^2} \operatorname{sen} 2 \varphi \text{ in luogo di } \varphi \text{ (§§ 33, 77), sarà}$$

$$L' = L - \frac{e^2}{2^2} \operatorname{sen} 2 \varphi \cdot \left(\frac{dL}{d\varphi} \right) = L - \frac{e^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{tang} \varphi}{\operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} L + \cos \varpi}.$$

Inoltre si ha $\lambda' = \lambda - \frac{e^2}{2^2} \operatorname{sen} 2 \lambda = \lambda - \frac{e^2}{2^2} \operatorname{sen} 2 L$. Dunque cambiando le quantità A , $(V-V')$, $\operatorname{sen} p'$ rispettivamente in

$\frac{\text{tang } L - \text{tang } \phi \cos \varpi}{\text{sen } \varpi (\text{tang } L \text{ tang } \phi + \cos \varpi)}$, $(v-v')$, $\text{sen } p$ per esser queste

già moltiplicate in e^2 , la stessa equazione diventerà

$$\lambda = L + \frac{e^2}{2} \left[\text{sen } L \cos L + \frac{(v-v') \text{sen } \zeta (\text{sen } L - \text{tang } \phi \cos L \cos \varpi) - \text{tang } \phi \text{sen } \varpi}{\text{sen } \varpi (\text{tang } L \text{ tang } \phi + \cos \varpi)} \right]$$

nella quale sarà

$$\text{sen } p = \text{sen } \zeta \cos L; \text{sen } v = \frac{\text{sen } \phi}{\cos p}; \text{sen } v' = \frac{\text{sen } L}{\cos p}.$$

115. Possiamo ottenere per mezzo dell'equazione primitiva (§§ 25, 27) un altro valore della latitudine λ indipendente dalla sfera inscritta, poichè neglimentando la quarta potenza dell'eccentricità, e supponendo

$$\Sigma = \frac{e^2}{2} \text{sen } p' \cdot \left(v - v' + \frac{\text{sen } (v - v') \cos v'}{\cos v} \right), \text{ la detta equazio-}$$

ne diventa (§ 101), $\varpi + \Sigma = z - z'$, dalla quale ne risulta (§ 110)

$$\text{tang } \frac{1}{2} \lambda = \frac{-\text{sen } \zeta \text{sen } \phi \cos (\varpi + \Sigma) \pm \sqrt{[\text{sen } \zeta^2 - \cos \phi^2 \text{sen } (\varpi + \Sigma)^2]}}{\text{sen } \zeta \text{sen } \phi + \cos \zeta \cos \phi \text{sen } (\varpi + \Sigma)}$$

Facendo pertanto

$$\text{tang } \frac{1}{2} L = \frac{-\text{sen } \zeta \text{sen } \phi \cos \varpi \pm \sqrt{[\text{sen } \zeta^2 - \cos \phi^2 \text{sen } \varpi^2]}}{\text{sen } \zeta \text{sen } \phi + \cos \zeta \cos \phi \text{sen } \varpi},$$

si avrà $\text{tang } \frac{1}{2} \lambda = \text{tang } \frac{1}{2} L + \Sigma \cdot \left(\frac{d \cdot \text{tang } \frac{1}{2} L}{d \varpi} \right)$, ossia

$$\lambda = L + \Sigma \cdot \left(\frac{d L}{d \varpi} \right), \text{ vale a dire}$$

$$\lambda = L + \frac{e^2}{2} \cdot \frac{\text{sen } \zeta (\text{sen } L - \text{tang } \phi \cos L \cos \varpi)}{\text{sen } \varpi (\text{tang } \phi \text{ tang } L + \cos \varpi)} \cdot \left(v - v' + \frac{\text{sen } (v - v') \cos v'}{\cos v} \right)$$

116. L'uso di quest'ottavo problema debb' essere frequente nella geodesia, allorquando l'angolo dato ζ è retto, e quantunque sia facile l'adattare le date soluzioni a questo caso (§ 71), non sarà forse inopportuno il ricavare direttamente dall'equazione XIII una nuova soluzione indipendente dalla sfera inscritta. Sia pertanto da trovarsi la latitudine λ per mezzo dei tre elementi $\phi, \varpi, \zeta = 90^\circ$ non ommettendo che l'ottava e le più alte potenze dell'eccentricità. Facciamo per brevità

$$\eta = B_0 \cdot \psi + B_1 \cdot \text{sen } 2\psi + B_2 \cdot \text{sen } 4\psi + \text{ec.}$$

l'equazione (XIII) sarà $z = 90^\circ - \varpi - \eta$, da cui si conchiude (§ 102)

$$\text{tang } \lambda = \frac{\text{tang } \phi}{\cos(\varpi + \eta)}. \text{ Si ha ancora } \cos \psi = \frac{\text{sen } \phi}{\text{sen } \lambda} = \frac{\cos \phi \cos(\varpi + \eta)}{\cos \lambda},$$

ovvero $\text{sen } \psi = \cos \phi \text{sen}(\varpi + \eta)$. Pongasi ora $\varpi + \eta = u$, ed $\eta = \phi u$, ne verrà l'equazione

$0 = \varpi - u + \phi u$, la quale ci darà (§§ 43, 44)

$$u = \varpi + \phi \varpi + \frac{d(\phi u)^2}{2 du} + \frac{d^2(\phi u)^3}{2 \cdot 3 du^2} + \text{ec.}$$

Ma, neglimentando l'ottava e le più alte potenze dell'eccentricità, si ha

$$\phi u = \eta = B_0 \cdot \psi + B_1 \cdot \text{sen } 2\psi + B_2 \cdot \text{sen } 4\psi$$

$$(\phi u)^2 = B_0^2 \cdot \psi^2 + 2 B_0 B_1 \psi \text{sen } 2\psi$$

$$(\phi u)^3 = B_0^3 \cdot \psi^3$$

Avremo quindi

$$\begin{aligned}\frac{d(\Phi u)^2}{2 \, du} &= (B_0 \cdot \psi^2 + B_1 \cdot \psi \operatorname{sen} 2\psi) \left(\frac{dB_0}{du} \right) + B_0 \cdot \psi \operatorname{sen} 2\psi \cdot \left(\frac{dB_1}{du} \right) \\ &\quad + \left(\frac{d\psi}{du} \right) \cdot \left[B_0^2 \cdot \psi + B_0 B_1 (\operatorname{sen} 2\psi + 2\psi \cos 2\psi) \right] \\ \frac{d^2(\Phi u)^3}{2 \cdot 3 \, du^2} &= B_0 \cdot \psi \left[\psi \left(\frac{dB_0}{du} \right) + B_0 \left(\frac{d\psi}{du} \right) \right]^2 + \frac{1}{2} B_0^2 \cdot \psi^2 \cdot \left[\psi \left(\frac{d^2 B_0}{du^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{dB_0}{du} \right) \left(\frac{d\psi}{du} \right) + B_0 \left(\frac{d^2 \psi}{du^2} \right) \right];\end{aligned}$$

e siccome dall'equazione precedente $\operatorname{sen} \phi = \cos \psi \operatorname{sen} \lambda$

si ha $\left(\frac{d\psi}{d\lambda} \right) = \cot \lambda \cot \psi$; similmente dall'equazione

$\operatorname{tang} \phi = \operatorname{tang} \lambda \cos u$ si ha $\left(\frac{d\lambda}{du} \right) = \operatorname{sen} \lambda \cos \lambda \operatorname{tang} u = \operatorname{sen} \lambda \operatorname{tang} \psi$;

otterremo pertanto $\left(\frac{d\psi}{du} \right) = \left(\frac{d\psi}{d\lambda} \right) \left(\frac{d\lambda}{du} \right) = \cos \lambda$;

$\frac{d^2 \psi}{du^2} = -\operatorname{sen} \lambda^2 \operatorname{tang} \psi$. Inoltre abbiamo (§ 70)

$$B_0 = \left(K + \frac{1}{2} K' \operatorname{sen} \lambda^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} K'' \operatorname{sen} \lambda^4 \right) \cos \lambda$$

$$B_1 = \frac{1}{2} (K' \operatorname{sen} \lambda^2 + K'' \operatorname{sen} \lambda^4) \cos \lambda$$

$$B_2 = \frac{1}{2} \cdot K'' \operatorname{sen} \lambda^4 \cos \lambda$$

Quindi sarà

$$\frac{d B_0}{d \lambda} = -K \operatorname{sen} \lambda + \frac{1}{2} K' (2 - 3 \operatorname{sen} \lambda^2) \operatorname{sen} \lambda$$

$$\frac{d B_1}{d \lambda} = \frac{1}{2^2} K' (2 - 3 \operatorname{sen} \lambda^2) \operatorname{sen} \lambda$$

$$\frac{d B_0}{d u} = \left(\frac{d B_0}{d \lambda} \right) \left(\frac{d \lambda}{d u} \right) = -\operatorname{sen} \lambda^2 \operatorname{tang} \psi \left[K - \frac{1}{2} K' (2 - 3 \operatorname{sen} \lambda^2) \right]$$

$$\frac{d B_1}{d u} = \left(\frac{d B_1}{d \lambda} \right) \left(\frac{d \lambda}{d u} \right) = \frac{1}{2^2} K' (2 - 3 \operatorname{sen} \lambda^2) \operatorname{sen} \lambda^2 \operatorname{tang} \psi$$

$$\frac{d d B_0}{d u^2} = -K \operatorname{sen} \lambda^2 \cos \lambda (1 + 3 \operatorname{tang} \psi^2)$$

Sostituendo questi valori, avremo

$$\begin{aligned} \frac{d(\Phi u)^2}{2 d u} &= -\psi \operatorname{sen} \lambda^2 \cos \lambda \operatorname{tang} \psi \left[\psi \left(K + \frac{1}{2} K' \operatorname{sen} \lambda^2 \right) + \frac{1}{2^2} K' \operatorname{sen} \lambda^2 \operatorname{sen} 2 \psi \right] \\ &\quad \left[K - \frac{1}{2} K' (2 - 3 \operatorname{sen} \lambda^2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2^2} K K' + \operatorname{sen} 2 \psi \operatorname{tang} \psi (2 - 3 \operatorname{sen} \lambda^2) \operatorname{sen} \lambda^2 \cos \lambda + K \psi \cos \lambda^3 \cdot (K + K' \operatorname{sen} \lambda^2) \\ &\quad + \frac{1}{2^2} K K' \operatorname{sen} \lambda^2 \cos \lambda^3 (\operatorname{sen} 2 \psi + 2 \psi \cos 2 \psi) \\ &= K^2 \cdot \psi \cos \lambda (\cos \lambda^2 - \psi \operatorname{tang} \psi \operatorname{sen} \lambda^2) \\ &\quad + \frac{K K'}{2^2} \cdot \psi \operatorname{tang} \psi (\psi + \operatorname{sen} \psi \cos \psi) \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} 4 \lambda \\ &\quad + \frac{K K'}{2} (2 \psi + \psi \cos 2 \psi + \operatorname{sen} \psi \cos \psi) \operatorname{sen} \lambda^2 \cos \lambda^3 \\ \frac{d^2 (\Phi u)^3}{2 \cdot 3 d u^2} &= K^3 \cdot \psi \cos \lambda (\cos \lambda^2 - \psi \operatorname{tang} \psi \operatorname{sen} \lambda^2)^2 \\ &\quad - \frac{K^3}{2} \cdot \psi^2 \operatorname{sen} \lambda^2 \cos \lambda^3 \left(3 \operatorname{tang} \psi + \psi (1 + 3 \operatorname{tang} \psi^2) \right) \end{aligned}$$

Laonde, chiamando L l'angolo λ , e q l'angolo ψ quando si mette ϖ in luogo di u , si avranno le seguenti equazioni per determinare la cercata latitudine λ .

$$1) \quad \text{tang } L = \frac{\text{tang } \phi}{\cos \varpi}$$

$$2) \quad \text{sen } q = \text{sen } \varpi \cos \phi$$

$$\begin{aligned} 3) \quad u = \varpi + q & \left(K + \frac{1}{2} K' \text{sen } L^2 + \frac{1.3}{2.4} K'' \text{sen } L^4 \right) \cos L \\ & + \frac{1}{2} \text{sen } 2q (K' + K'' \text{sen } L^2) \text{sen } L^2 \cos L + \frac{1}{2.5} K'' \text{sen } 4q \text{sen } L^4 \cos L \\ & + K^2 \cdot q \cos L (\cos L^2 - q \text{tang } q \text{sen } L^2) \\ & + \frac{1}{2} K K' q \text{tang } q \text{sen } L \text{sen } 4L (q + \text{sen } q \cos q) \\ & + \frac{1}{2} K K' \text{sen } L^2 \cos L^3 (2q + q \cos 2q + \text{sen } q \cos q) \\ & + K^3 \cdot q \cos L (\cos L^2 - q \text{tang } q \text{sen } L^2)^2 \\ & - \frac{1}{2} K^3 \cdot q^2 \text{sen } L^2 \cos L^3 (3 \text{tang } q + q(1 + 3 \text{tang } q^2)) \end{aligned}$$

$$4) \quad \text{tang } \lambda = \frac{\text{tang } \phi}{\cos u};$$

avvertendo che si ha (§ 70)

$$K = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1.1}{2.4} e^4 + \frac{1.1.3}{2.4.6} e^6; \quad K' = \frac{1.3}{2.4} e^4 + \frac{1.3}{4.6} e^6; \quad K'' = \frac{1.3.5}{2.4.6} e^6.$$

117. Rappresentiamo con μ la somma di tutti i termini di u affetti dall'eccentricità, si avrà $u = \varpi + \mu$. Ora, siccome L diventa λ quando si mette u in luogo

go di ϖ , ne risulterà (§ 76)

$$\lambda = L + \mu \left(\frac{dL}{d\varpi} \right) + \frac{\mu^2}{2} \cdot \left(\frac{d^2 L}{d\varpi^2} \right) + \frac{\mu^3}{2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{d^3 L}{d\varpi^3} \right) + \text{ec.}$$

Supponghiamo che si ommetta ancora la sesta potenza dell' eccentricità, essendo

$$\text{tang } L = \frac{\text{tang } \phi}{\cos \varpi}; \text{ sen } q = \text{sen } \varpi \cos \phi, \text{ e quindi}$$

$$\frac{dL}{d\varpi} = \text{sen } L \text{ tang } q; \quad \frac{d^2 L}{d\varpi^2} = \text{sen } L \cos L (1 + 2 \text{ tang } q^2)$$

$$\mu^2 = \frac{e^4}{2^1} q^2 \cos L^2; \text{ otterremo}$$

$$\begin{aligned} \lambda = L + q \text{ tang } q \text{ sen } 2L \left[\frac{e^2}{2^2} + \frac{e^4}{2^5} (2 + 3 \text{ sen } L^2) \right] + \frac{3}{2^5} e^4 \text{ sen } q^2 \text{ sen } L^2 \text{ sen } 2L \\ + \frac{e^4}{2^3} q \text{ tang } q \text{ sen } 2L (\cos L^2 - q \text{ tang } q \text{ sen } L^2) + \frac{e^4}{2^4} q^2 \text{ sen } 2L \cos L^2 (1 + 2 \text{ tang } q^2) \end{aligned}$$

P R O B L E M A IX

118. Dati nel triangolo sferoidico elittico i tre angoli ζ, θ, ϖ , trovare la latitudine λ .

S O L U Z I O N E I

Supposta λ' la latitudine sulla sfera inscritta corrispondente a λ , e ritenuto il valore di σ come nel problema VI, l'equazione (XVI) diventerà

$\varpi + \sigma = Z - Z'$. Essendo poi (§ 88)

$$\text{tang } V = \frac{\sqrt{(\text{sen } \theta^2 - \text{sen } p'^2)}}{\text{sen } \zeta \cos \lambda' \cos \theta}; \quad \text{tang } V' = \frac{\text{tang } \lambda'}{\cos \zeta},$$

ne verrà

$$\operatorname{tang}(\varpi + \sigma) = \operatorname{tang}(Z - Z') = \frac{\operatorname{sen} p' (\operatorname{tang} V - \operatorname{tang} V')}{1 + \operatorname{sen} p'^2 \operatorname{tang} V \operatorname{tang} V'}$$

vale a dire

$$\operatorname{tang}(\varpi + \sigma) = \frac{-\operatorname{sen} \zeta \operatorname{sen} \lambda' \cos \theta + \cos \zeta \sqrt{(\operatorname{sen} \theta^2 - \operatorname{sen} p'^2)}}{\cos \zeta \cos \theta + \operatorname{sen} \zeta \operatorname{sen} \lambda' \sqrt{(\operatorname{sen} \theta^2 - \operatorname{sen} p'^2)}}$$

e quindi

$$\operatorname{sen}(\varpi + \sigma) = \frac{-\operatorname{sen} \zeta \operatorname{sen} \lambda' \cos \theta + \cos \zeta \sqrt{(\operatorname{sen} \theta^2 - \operatorname{sen} p'^2)}}{\cos p'^2}$$

$$\cos(\varpi + \sigma) = \frac{\cos \zeta \cos \theta + \operatorname{sen} \zeta \operatorname{sen} \lambda' \sqrt{(\operatorname{sen} \theta^2 - \operatorname{sen} p'^2)}}{\cos p'^2}$$

Eliminando i radicali da queste ultime espressioni, otterremo

$$\operatorname{sen} \lambda' = \frac{\cos \zeta \cos(\varpi + \sigma) - \cos \theta}{\operatorname{sen} \zeta \operatorname{sen}(\varpi + \sigma)}$$

Ora facendo $\varpi + \sigma = u$, ed in oltre $\sigma = \Phi u$, avremo l'equazione

$$0 = \varpi - u + \Phi u$$

donde ricaveremo (§§ 43, 44)

$$u = \varpi + \Phi \varpi + \frac{d(\Phi u)^2}{2 du} + \frac{d^2(\Phi u)^3}{2 \cdot 3 du^2} + \text{ec.}$$

avvertendo di mettere dopo le differenziazioni ϖ in luogo

di u ne' termini $\frac{d(\Phi u)^2}{2 du}$, $\frac{d^2(\Phi u)^3}{2 \cdot 3 du^2}$, ec. Si avrà in se-

guito $\text{sen } \lambda' = \frac{\cos \zeta \cos u - \cos \theta}{\text{sen } \zeta \text{sen } u}$; e si troverà finalmente

(§ 33) la latitudine λ sullo sferoide corrispondente a λ' .

119. A rischiarare la soluzione del problema prendiamo l'esempio in cui si trascurano la sesta e le più alte potenze dell'eccentricità. Avremo (§ 67)

$$\Phi u = \tau = \left[\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2^4} (1 + \text{sen } p'^2) \right] (V - V') \text{sen } p' + \frac{e^4}{2^4} \text{sen } p' \cos p'^2. [1]$$

$$(\Phi u)^2 = \frac{e^4}{2^4} (V - V')^2 \text{sen } p'^2$$

$$\frac{d(\Phi u)^2}{2 \, d u} = \frac{e^4}{2^4} (V - V') \text{sen } p'^2 \left(\frac{V - V'}{\text{sen } p'} \cdot \frac{d \text{sen } p'}{d \lambda'} + \frac{d(V - V')}{d \lambda'} \right) \left(\frac{d \lambda'}{d u} \right)$$

$$\text{Avendosi poi } \cos V = \text{tang } p' \cot \theta; \cos V' = \frac{\cos \zeta \cos \lambda'}{\cos p'},$$

ne verrà (§ 39)

$$\frac{d(V - V')}{d \lambda'} = \frac{\text{tang } \lambda'}{\cos p'^2} (\cot V - \cot V') = - \frac{\text{tang } \lambda'}{\cos p'^2} \cdot \frac{\text{sen}(V - V')}{\text{sen } V \text{sen } V'};$$

si avrà in seguito $\frac{d \text{sen } p'}{d \lambda'} = - \text{sen } p' \text{tang } \lambda'$. Inoltre dall'e-

quazione precedente $\text{sen } \lambda' \text{sen } \zeta \text{sen } u = \cos \zeta \cos u - \cos \theta$

si ottiene $\frac{d \lambda'}{d u} = \frac{- \cot \zeta - \text{sen } \lambda' \cot u}{\cos \lambda'}$. Laonde, mettendo

π in luogo di u e supponendo che in questo caso λ' di-

venti L' ; facendo ancora per brevità $A = \frac{d L'}{d \pi}$, ne risulterà

$$\frac{d(\uparrow u)^2}{2 du} = -\frac{e^4}{2^2} A(V-V') \operatorname{tang} L' \operatorname{sen} p'^2 \left(V-V' + \frac{\operatorname{sen}(V-V')}{\cos p'^2 \operatorname{sen} V \operatorname{sen} V'} \right)$$

e le seguenti formole serviranno a determinare la latitudine λ'

$$1) \operatorname{sen} L' = \frac{\cos \zeta \cos \varpi - \cos \theta}{\operatorname{sen} \zeta \operatorname{sen} \varpi}$$

$$2) A = \frac{-\cot \zeta - \operatorname{sen} L' \cot \varpi}{\cos L'}$$

$$3) \operatorname{sen} p' = \operatorname{sen} \zeta \cos L'$$

$$4) \operatorname{sen} V' = \frac{\operatorname{sen} L'}{\cos p'}$$

$$5) \operatorname{sen} V = \operatorname{tang} p' \cot \theta$$

$$6) u = \varpi + \left[\frac{r^2}{2} + \frac{e^4}{2^2} (1 + \operatorname{sen} p'^2) \right] (V-V') \operatorname{sen} p' + \frac{e^4}{2^2} \operatorname{sen} p' \cos p'^2 \cdot [1] \\ - \frac{e^4}{2^2} A(V-V') \operatorname{tang} L' \operatorname{sen} p'^2 \left(V-V' + \frac{\operatorname{sen}(V-V')}{\cos p'^2 \operatorname{sen} V \operatorname{sen} V'} \right)$$

$$7) \operatorname{sen} \lambda' = \frac{\cos \zeta \cos u - \cos \theta}{\operatorname{sen} \zeta \operatorname{sen} u}.$$

S O L U Z I O N E 2

120. Ritenute dalla prima soluzione le due equa-

$$\text{zioni } \operatorname{sen} L' = \frac{\cos \zeta \cos \varpi - \cos \theta}{\operatorname{sen} \zeta \operatorname{sen} \varpi}; \operatorname{sen} \lambda' = \frac{\cos \zeta \cos(\varpi + \sigma) - \cos \theta}{\operatorname{sen} \zeta \operatorname{sen}(\varpi + \sigma)},$$

$$\text{pongasi } a = \frac{d \cdot \operatorname{sen} L'}{d \varpi}; b = \frac{d^2 \cdot \operatorname{sen} L'}{d \varpi^2}; c = \frac{d^3 \cdot \operatorname{sen} L'}{d \varpi^3}; \text{ ec.}$$

Sia inoltre

$\Phi \lambda' = a \cdot \sigma + \frac{b \cdot \sigma^2}{2} + \frac{c \cdot \sigma^3}{2 \cdot 3} + \text{ec.}$ avremo l'equazione

$$0 = \text{sen } L' - \text{sen } \lambda' + \Phi \lambda'$$

la quale confrontata coll'equazione (§ 43)

$$0 = a - x + \Phi x$$

ci dà $\text{sen } L' = a$; $\text{sen } \lambda' = x$; $\Phi \lambda' = \Phi x$. Quindi se si vuol avere l'immediato valore di λ' , si farà $\Psi x = \lambda'$, cosicchè

sarà $\frac{d \Psi x}{d x} = \Psi' x = \frac{d \lambda'}{d x} = \frac{1}{\cos \lambda'}$. Dunque posto

$$\frac{d \left[\frac{(\Phi \lambda')^m}{\cos \lambda'} \right]}{d \lambda'} = (\Phi' \lambda')^m; \quad \frac{d \left[\frac{(\Phi' \lambda')^m}{\cos \lambda'} \right]}{d \lambda'} = (\Phi'' \lambda')^m; \quad \frac{d \left[\frac{(\Phi'' \lambda')^m}{\cos \lambda'} \right]}{d \lambda'} = (\Phi''' \lambda')^m; \text{ ec.}$$

avremo

$$\lambda' = L' + \frac{\Phi L'}{\cos L'} + \frac{(\Phi' \lambda')^2}{2 \cos L'} + \frac{(\Phi'' \lambda')^3}{2 \cdot 3 \cos L'} + \text{ec.}$$

e si metterà ne' termini $(\Phi' \lambda')^2$, $(\Phi'' \lambda')^3$, ec. dopo le differenziazioni L' in luogo di λ' .

121. Applichiamo questa seconda soluzione all'esempio precedente, in cui non si tien conto della sesta e delle più alte potenze dell'eccentricità. Sarà in questo caso

$$\Phi \lambda' = a \cdot \sigma + \frac{b \cdot \sigma^2}{2}, \text{ ovvero}$$

$$\begin{aligned} \Phi \lambda' = & \left[\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2^4} (1 + \text{sen } p'^2) \right] (V - V') a \text{sen } p + \frac{e^4}{2^4} a \text{sen } p' \cos p'^2 \cdot [1] \\ & + \frac{e^4}{2^3} b (V - V')^2 \text{sen } p'^2 \end{aligned}$$

$$(\phi \lambda')^2 = \frac{e^4}{2^2} a^2 (V - V')^2 \operatorname{sen} p'^2$$

$$(\phi' \lambda')^2 = \frac{d \left[\frac{(\phi \lambda')^2}{\cos \lambda'} \right]}{d \lambda'} = \frac{e^4}{2^2} a^2 (V - V')^2 \operatorname{sen} p'^2 \frac{\operatorname{tang} \lambda'}{\cos \lambda'} \\ + \frac{e^4}{2} a^2 (V - V') \frac{\operatorname{sen} p'^2}{\cos \lambda'} \left(\frac{V - V'}{\operatorname{sen} p'} \cdot \frac{d \operatorname{sen} p'}{d \lambda'} + \frac{d(V - V')}{d \lambda'} \right)$$

vale a dire (§ 119)

$$(\phi' \lambda')^2 = - \frac{e^4}{2^2} a^2 (V - V') \operatorname{sen} p'^2 \frac{\operatorname{tang} \lambda'}{\cos \lambda'} \left(V - V' + \frac{2 \operatorname{sen} (V - V')}{\cos p'^2 \operatorname{sen} V \operatorname{sen} V'} \right)$$

Mettiamo ora L' in luogo di λ' , e sia $A = \frac{d L'}{d \varpi}$; $B = \frac{d d L'}{d \varpi^2}$,

sarà $a = A \cos L'$; $b = B \cos L' - A^2 \operatorname{sen} L'$. Onde l'equazione

$$\lambda' = L' + \frac{\phi L'}{\cos L'} + \frac{(\phi' \lambda')^2}{2 \cos L'} \text{ diventerà}$$

$$\lambda' = L' + \left[\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2^4} (1 + \operatorname{sen} p'^2) \right] A (V - V') \operatorname{sen} p' + \frac{e^4}{2^4} A \operatorname{sen} p' \cos p'^2. [1]$$

$$+ \frac{e^4}{2^3} (V - V')^2 \operatorname{sen} p'^2 (B - 2 A^2 \operatorname{tang} L') - \frac{e^4}{2^2} A^2 (V - V') \operatorname{tang} p'^2 \operatorname{tang} L' \frac{\operatorname{sen} (V - V')}{\operatorname{sen} V \operatorname{sen} V'}$$

Le quantità L' , A , p' , V' , V si otterranno dalle prime cinque formole precedenti (§ 119), e B dalla formola

$$B = \operatorname{tang} L' (1 + \cot \varpi^2 + A^2) - A \cot \varpi$$

122. Da quest'ultima equazione si può ricavarne un'altra che ci darà il valore della latitudine λ sullo sferoide indipendentemente dalla sfera inscritta. In fatti l'arco L' determinato dall'equazione $\operatorname{sen} L' = \frac{\cos \zeta \cos \varpi - \cos \theta}{\operatorname{sen} \zeta \operatorname{sen} \varpi}$

è lo stesso tanto sulla sfera inscritta, quanto sullo sferoide; quindi tutti i termini del secondo membro dipendenti da L' e dai tre dati elementi ζ , θ , ϖ resteranno invariabili. Il primo membro poi sarà (§ 33)

$$\lambda' = \lambda - \frac{e^2}{2^2} \operatorname{sen} 2\lambda - \frac{e^4}{2^4} \operatorname{sen} 2\lambda (2 - \cos 2\lambda)$$

Laonde col metodo sopra (§ 92) usato troveremo

$$\begin{aligned} \lambda = L' + \frac{e^2}{2} (\operatorname{sen} L' \cos L' + A(V-V') \operatorname{sen} p') + \frac{e^4}{2^4} \operatorname{sen} 2L' (2 + \cos 2L') \\ + \frac{e^4}{2^4} (1 + \operatorname{sen} p'^2 + 4 \cos 2L') A(V-V') \operatorname{sen} p' \\ + \frac{e^4}{2^4} A \operatorname{sen} p' \cos p'^2 \operatorname{sen} (V-V') \cos (V+V') \\ + \frac{e^4}{2^3} (V-V')^2 \operatorname{sen} p'^2 (B - 2A^2 \operatorname{tang} L') \\ - \frac{e^4}{2^2} A^2 (V-V') \operatorname{tang} p'^2 \operatorname{tang} L' \frac{\operatorname{sen} (V-V')}{\operatorname{sen} V \operatorname{sen} V'} \end{aligned}$$

e si calcoleranno le quantità L' , A , p' , V' , V , B colle formole già accennate (§§ 119, 121).

123. Qualora l'angolo ζ sia retto, ne verrà $p' = 90^\circ - L'$; $V' = 90^\circ$, e sarà

$$\operatorname{sen} L' = \frac{-\cos \theta}{\operatorname{sen} \varpi}$$

Quindi posto $V = 90^\circ + \Psi'$, si avrà (§ 71),

$$\cos V = -\operatorname{sen} \Psi' = \cot \theta \cot L', \text{ ovvero}$$

$$\operatorname{tang} \Psi' = \cos L' \operatorname{tang} \varpi$$

Inoltre sarà $A = -\operatorname{tang} L' \cot \varpi$; $B = \frac{\operatorname{tang} L'}{\operatorname{sen} \varpi^2} \left(1 + \frac{\cos \varpi^2}{\cos L'^2} \right)$.

Facendo pertanto le dovute riduzioni, ed avvertendo che l'ultimo termine

$$-\frac{e^4}{2^2} A^2 (V-V') \operatorname{tang} p'^2 \operatorname{tang} L' \frac{\operatorname{sen} (V-V')}{\operatorname{sen} V \operatorname{sen} V'}, \text{ diventa}$$

$$-\frac{e^4}{2^2} A^2 \Psi' \cot L' \operatorname{tang} \Psi' = \frac{e^4}{2^2} A \Psi' \cos L', \text{ otterremo}$$

$$\begin{aligned} \lambda = L' + \frac{e^2}{2} (\operatorname{sen} L' \cos L' - \Psi' \operatorname{sen} L' \cot \varpi) - \frac{e^4}{2^4} \Psi' (1 + 9 \cos L'^2) \operatorname{sen} L' \cot \varpi \\ + \frac{e^4}{2^4} \operatorname{sen} 2 L' (2 + \cos 2 L') + \frac{e^4}{2^4} \operatorname{sen} L'^3 \cot \varpi \operatorname{sen} \Psi' \cos \Psi' \\ + \frac{e^4}{2^3} \Psi'^2 \cdot \frac{\operatorname{tang} L'}{\operatorname{sen} \varpi^2} (\cos L'^2 + \cos 2 L' \cos \varpi^2) \end{aligned}$$

Lo stesso valore di λ si potrebbe ricavare dall'equazione (XIII), oppure dall'equazione (XVI), qualora (§ 71) si ponga in questa $\zeta = 90^\circ$.

PROBLEMA X

124 Dati nel triangolo sferoidico ellittico i tre elementi ζ, P, ϖ , trovare la latitudine λ .

SOLUZIONE I.

Posta λ' la latitudine nella sfera inscritta corrispondente a λ , si sostituisca nell'equazione (XVI) in vece di V il suo valore trovato sopra (§§ 46, 51). Per agevolare la sostituzione, si noti (§ 44) che si ha

$\omega = \frac{P}{1 + Q'} = P - \frac{Q'}{1 + Q'} \cdot P = P - \alpha_0 \cdot P$, e che le quantità α' , α'' , α''' ec. sono le stesse che α_1 ; α_2 ; α_3 ; ec. (§ 66); quindi facendo per brevità

$$\begin{aligned} \tau = & -\alpha_0 P + \alpha_1 \operatorname{sen} 2 V' + \alpha_2 \operatorname{sen} 4 V' + \alpha_3 \operatorname{sen} 6 V' + \text{ec.} \\ & + a' A \operatorname{sen} 2 (V' + P - \alpha_0 P) + a'' B \operatorname{sen} 4 (V' + P - \alpha_0 P) + \text{ec.} \\ & + a' A' \operatorname{sen} 2 (2 V' + P - \alpha_0 P) + a'' B' \operatorname{sen} 2 (3 V' + 2 P - 2 \alpha_0 P) + \text{ec.} \\ & + a' A^{(1)} \operatorname{sen} 2 (P - \alpha_0 P) + a'' B^{(1)} \operatorname{sen} 2 (V' + 2 P - 2 \alpha_0 P) + \text{ec.} \\ & + \text{ec.} \end{aligned}$$

avremo $V = V' + P + \tau$. Ora nell'equazione (XVI)

$$\varpi = Z - Z' - \beta_0 (V - V') - 2 \beta_1 \cdot [1] - 2 \beta_2 \cdot [2] - \text{ec.}$$

si ha

$$Z = \operatorname{Ang. tang} [\operatorname{sen} p' \operatorname{tang} V] = \operatorname{Ang. tang} [\operatorname{sen} p' \operatorname{tang} (V' + P + \tau)];$$

$$Z' = \operatorname{Ang. tang} [\operatorname{sen} p' \operatorname{tang} V'], \text{ e supponendo per brevità}$$

$$x = V' + P; y = \operatorname{Ang. tang} [\operatorname{sen} p' \operatorname{tang} x], \text{ ed in oltre}$$

$$R = \tau \cdot \frac{d y}{d x} + \frac{\tau^2}{2} \cdot \frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{\tau^3}{2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3 y}{d x^3} + \text{ec.}$$

secondo il teorema di Taylor si avrà $Z = y + R$, e sarà

$$\frac{d y}{d x} = \frac{\operatorname{sen} p'}{1 - \cos p'^2 \operatorname{sen} x^2}$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{\operatorname{sen} p' \cos p'^2 \operatorname{sen} 2 x}{(1 - \cos p'^2 \operatorname{sen} x^2)^2}$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{2 \operatorname{sen} p' \cos p'^2 \operatorname{sen} 2 x^2}{(1 - \cos p'^2 \operatorname{sen} x^2)^3} + \frac{2 \operatorname{sen} p' \cos p'^2 \cos 2 x}{(1 - \cos p'^2 \operatorname{sen} x^2)^2}$$

ec.

Rimettendo in vece di x, y i loro valori, ne risulterà

$$Z - Z' = \operatorname{Ang. tang} [\operatorname{sen} p' \operatorname{tang} (V' + P)] - \operatorname{Ang. tang} [\operatorname{sen} p' \operatorname{tang} V'] + R$$

Sarà inoltre generalmente

$$[i] = \operatorname{sen} i (P + \tau) \cos i (2V' + P + \tau); \text{ vale a dire}$$

$$[i] = \operatorname{sen} i P \cos i (2V' + P) + \frac{1}{2} \left(2i\tau - \frac{(2i\tau)^3}{2 \cdot 3} + \frac{(2i\tau)^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \text{ec.} \right) \cos 2i (V' + P) \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{(2i\tau)^2}{2} - \frac{(2i\tau)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{(2i\tau)^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \text{ec.} \right) \operatorname{sen} 2i (V' + P)$$

Dunque supponendo

$$\sigma = -R + \beta_0 (P + \tau) + 2\beta_1 [1] + 2\beta_2 [2] + 2\beta_3 [3] + \text{ec.}$$

la stessa equazione (XVI) diventerà

$$\pi + \sigma = \operatorname{Ang. tang} [\operatorname{sen} p' \operatorname{tang} (V' + P)] - \operatorname{Ang. tang} [\operatorname{sen} p' \operatorname{tang} V']$$

da cui ricaviamo

$$\operatorname{tang} (\pi + \sigma) = \frac{\operatorname{sen} p' \operatorname{tang} (V' + P) - \operatorname{sen} p' \operatorname{tang} V'}{1 + \operatorname{sen} p'^2 \operatorname{tang} (V' + P) \operatorname{tang} V'} \\ = \frac{\operatorname{sen} p' \operatorname{tang} P}{\cos V'^2 + \operatorname{sen} V'^2 \operatorname{sen} p'^2 - \cos p'^2 \operatorname{sen} V' \cos V' \operatorname{tang} P} \\ = \frac{\operatorname{sen} \zeta \operatorname{tang} P}{\cos \lambda' - \operatorname{sen} \lambda' \cos \zeta \operatorname{tang} P}$$

Reciprocamente sarà

$$\cos \lambda' = \frac{\operatorname{sen} \zeta \operatorname{sen} P \cos P \cos (\varpi + \tau) \pm \cos \zeta \operatorname{sen} P \sqrt{(\operatorname{sen} (\tau + \varpi)^2 - \operatorname{sen} \zeta^2 \operatorname{sen} P^2)}}{(1 - \operatorname{sen} \zeta^2 \operatorname{sen} P^2) \operatorname{sen} (\varpi + \sigma)}$$

Pongasi finalmente $u = \varpi + \tau = \varpi + \Phi u$ di maniera che sia σ eguale ad una funzione di u , ne verrà l'equazione

$$0 = \varpi - u + \Phi u$$

la quale ci darà (§ 43, 44)

$$u = \varpi + \Phi \varpi + \frac{d(\Phi u)^2}{2 du} + \frac{d^2(\Phi u)^3}{2 \cdot 3 du^2} + \text{ec.}$$

avvertendo di mettere ϖ in luogo di u ne' termini

$$\frac{d(\Phi u)^2}{2 du}, \frac{d^2(\Phi u)^3}{2 \cdot 3 du^2}, \text{ ec. dopo tutte le differenziazioni. Ed}$$

è manifesto che, essendo $\Phi u = \tau$ funzione di λ' e delle costanti P, ζ , sarà

$$\frac{d(\Phi u)^m}{du} = m(\Phi u)^{m-1} \cdot \left(\frac{d(\Phi u)}{d\lambda'} \right) \left(\frac{d\lambda'}{du} \right);$$

e dall'equazione precedente

$$\operatorname{tang} u = \frac{\operatorname{sen} \zeta \operatorname{tang} P}{\cos \lambda' - \operatorname{sen} \lambda' \cos \zeta \operatorname{tang} P} \text{ avendosi}$$

$$\frac{d\lambda}{du} = \frac{\operatorname{sen} \zeta \operatorname{tang} P}{\operatorname{sen} u^2 (\operatorname{sen} \lambda' + \cos \lambda' \cos \zeta \operatorname{tang} P)}, \text{ ne segue che}$$

$$\frac{d(\Phi u)^m}{du}, \frac{d^2(\Phi u)^m}{du^2}, \frac{d^3(\Phi u)^m}{du^3}, \text{ ec.}$$

saranno pure funzioni di u, λ' e delle costanti P, ζ facilmente determinabili colla semplice differenziazione.

Il trovato valore di u sostituito nella formola precedente

$$\cos \lambda' = \frac{\operatorname{sen} P [\operatorname{sen} \zeta \cos P \cos u \pm \cos \zeta \sqrt{(\operatorname{sen} u^2 - \operatorname{sen} \zeta^2 \operatorname{sen} P^2)}]}{(1 - \operatorname{sen} \zeta^2 \operatorname{sen} P^2) \operatorname{sen} u}$$

ci darà la latitudine λ' , a cui si troverà (§ 33) la corrispondente latitudine λ sullo sferoide ellittico.

125. Sia, per esempio, da trovarsi la latitudine λ' per mezzo dei tre dati elementi ζ , P , ϖ nel caso che si trascurino la sesta e le più alte potenze dell'eccentricità. Facendo per brevità

$$[1] = \operatorname{sen} P \cos (2V' + P); [2] = \operatorname{sen} 2P \cos 2(2V' + P),$$

avremo in primo luogo (§§ 51, 124)

$$\begin{aligned} V = V' + P + \tau = V' + P - \alpha_0 P - 2\alpha_1 \operatorname{sen}(P - \alpha_0 P) \cos(2V' + P - \alpha_0 P) \\ - 2\alpha_2 [2] + 4\alpha_1^2 [1] \cos 2(V' + P) \end{aligned}$$

cioè sarà

$$\tau = -\alpha_0 P - 2\alpha_1 [1] + 2\alpha_0 \alpha_1 P \cos 2(V' + P) - 2\alpha_2 [2] + 4\alpha_1^2 [1] \cos 2(V' + P)$$

ossia (§ 66)

$$\tau = -\left[\frac{\Delta^2}{2^1} \cos p'^2 + \frac{\Delta^4}{2^4} \cos p'^4 \cos 2(V' + P)\right] (P - [1]) + \frac{\Delta^4}{2^7} \cos p'^4 (14P - 16[1] + [2])$$

Posto inoltre per brevità

$$\Lambda = \frac{\operatorname{sen} p'}{1 - \cos p'^2 \operatorname{sen} (V' + P)^2}$$

$$\text{ne verrà } R = \Lambda \tau + \frac{\Lambda^2 \tau^2 \cos p'^2 \operatorname{sen} 2(V' + P)}{2 \operatorname{sen} p'}$$

Essendo poi (§ 67)

$$\beta_0 \cdot (P + \tau) + 2\beta_1 \cdot [1] = \left[\frac{\Delta^2}{2} - \frac{3\Delta^4}{2^4} (2 + \cos p'^2) \right] P \operatorname{sen} p' + \frac{3\Delta^4}{2^4} \operatorname{sen} p' \cos p'^2 \cdot [1]$$

se ponghiamo ancora

$$\Pi = (P - [1]) \cos p'^2 + \frac{2 P \operatorname{sen} p'}{\Lambda}$$

avremo

$$\begin{aligned} \Phi u = \sigma = \frac{\Delta^2}{2^2} \cdot \Lambda \Pi - \frac{\Delta^4}{2^5} & \left(\frac{\Lambda^2 \cos p'^6 \operatorname{sen} 2(V' + P)}{\operatorname{sen} p'} \cdot (P - [1])^2 \right. \\ & \left. + 6 \operatorname{sen} p' [P(2 + \cos p'^2) - [1] \cos p'^2] \right) \\ & - \frac{\Delta^4}{2^2} \Lambda \cos p'^4 \left(2 P(3 + 3 \operatorname{sen}(V' + P)^2) - 8[1](1 + 2 \operatorname{sen}(V' + P)^2) + [2] \right) \end{aligned}$$

$$(\Phi u)^2 = \frac{\Delta^4}{2^3} \cdot \Lambda^2 \Pi^2$$

$$\frac{d(\Phi u)^2}{2 du} = \frac{\Delta^4}{2^4} \cdot \Lambda \Pi \cdot \left(\frac{d\lambda'}{du} \right) \left(\Pi \frac{d\Lambda}{d\lambda'} + \Lambda \frac{d\Pi}{d\lambda'} \right)$$

e sarà

$$\frac{d\Lambda}{d\lambda'} = \frac{\Lambda}{\operatorname{sen} p'} \cdot \frac{d \operatorname{sen} p'}{d\lambda'} + 2\Lambda^2 \cot p' \operatorname{sen}(V' + P)^2 \left(\frac{d \cos p'}{d\lambda'} + \cos p' \cot(V' + P) \cdot \frac{dV'}{d\lambda'} \right)$$

$$\frac{d\Pi}{d\lambda'} = 2[P - [1] - 2P \operatorname{sen}(V' + P)^2] \cos p' \left(\frac{d \cos p'}{d\lambda'} \right)$$

$$- 2 \cos p'^2 [P \operatorname{sen} 2(V' + P) - \operatorname{sen} P \operatorname{sen}(2V' + P)] \left(\frac{dV'}{d\lambda'} \right)$$

vale a dire (§ 80)

$$\frac{d\Lambda}{d\lambda'} = -\Lambda \operatorname{tang} \lambda' \left[1 - 2\Lambda \operatorname{sen}(V' + P)^2 \left(\operatorname{sen} p' + \frac{\cot V' \cot(V' + P)}{\operatorname{sen} p'} \right) \right]$$

$$\frac{d \Pi}{d \lambda'} = 2 \operatorname{tang} \lambda' \left[(P \cos 2(V' + P) - [1]) \operatorname{sen} p'^2 - \cot V' (P \operatorname{sen} 2(V' + P) - \operatorname{sen} P \operatorname{sen} (2 V' + P)) \right]$$

Supponendo pertanto che λ' diventi L' quando si mette ϖ in luogo di u , e facendo $A = \frac{d L'}{d \varpi}$, il calcolo della latitudine λ' si potrà ordinare nella maniera seguente

$$1) \cos L' = \frac{\operatorname{sen} P [\operatorname{sen} \zeta \cos P \cos \varpi \pm \cos \zeta \sqrt{(\operatorname{sen} \varpi^2 - \operatorname{sen} \zeta^2 \operatorname{sen} P^2)}]}{(1 - \operatorname{sen} \zeta^2 \operatorname{sen} P^2) \operatorname{sen} \varpi}$$

$$2) A = \frac{\operatorname{sen} \zeta \operatorname{tang} P}{\operatorname{sen} \varpi^2 (\operatorname{sen} L' + \cos L' \cos \zeta \operatorname{tang} P')}$$

$$3) \operatorname{sen} p' = \operatorname{sen} \zeta \cos L'$$

$$4) \operatorname{sen} V' = \frac{\operatorname{sen} L'}{\cos p'}$$

$$5) \Lambda = \frac{\operatorname{sen} p'}{1 - \cos p'^2 \operatorname{sen} (V' + P)^2}$$

$$6) \Pi = (P - [1]) \cos p'^2 + \frac{2 P \operatorname{sen} p'}{\Lambda}$$

$$7) u = \varpi + \frac{\Delta^2}{2^2} \Lambda \Pi - \frac{\Delta^4}{2^5} \left\{ \frac{\Lambda^2 \cos p'^4 \operatorname{sen} 2(V' + P)}{\operatorname{sen} p'} \cdot (P - [1])^2 \right.$$

$$\left. + 6 \operatorname{sen} p' [P(2 + \cos p'^2) - [1] \cos p'^2] \right\}$$

$$- \frac{\Delta^4}{2^7} \Lambda \cos p'^4 \left\{ 2 P(3 + 8 \operatorname{sen} (V' + P)^2) - 8 [1] (1 + 2 \operatorname{sen} (V' + P)^2) + [2] \right\}$$

$$- \frac{\Delta^4}{2^4} A \Lambda^2 \Pi^2 \operatorname{tang} L' \left\{ 1 - 2 \Lambda \operatorname{sen} (V' + P)^2 \left[\operatorname{sen} p' + \frac{\cot V' \cot (V' + P)}{\operatorname{sen} p'} \right] \right\}$$

$$+ \frac{\Delta^4}{2^4} A \Lambda^2 \Pi \operatorname{tang} L' \left\{ (P \cos 2(V' + P) - [1]) \operatorname{sen} p'^2 - \cot V' (P \operatorname{sen} 2(V' + P) - \operatorname{sen} P \operatorname{sen} (2V' + P)) \right\}$$

avvertendo che si ha

$$[1] = \operatorname{sen} P \cos (2V' + P); [2] = \operatorname{sen} 2P \cos 2(2V' + P).$$

Finalmente sarà

$$8) \cos \lambda' = \frac{\operatorname{sen} P [\operatorname{sen} \zeta \cos P \cos u \pm \cos \zeta \sqrt{(\operatorname{sen} u^2 - \operatorname{sen} \zeta^2 \operatorname{sen} P^2)}]}{(1 - \operatorname{sen} \zeta^2 \operatorname{sen} P^2) \operatorname{sen} u}$$

S O L U Z I O N E 2

126. Colle sostituzioni e denominazioni della prima soluzione si arriverà all'equazione

$$\cos \lambda' = \frac{\operatorname{sen} P [\operatorname{sen} \zeta \cos P \cos (\varpi + \sigma) \pm \cos \zeta \sqrt{(\operatorname{sen} (\varpi + \sigma)^2 - \operatorname{sen} \zeta^2 \operatorname{sen} P^2)}]}{(1 - \operatorname{sen} \zeta^2 \operatorname{sen} P^2) \operatorname{sen} (\varpi + \sigma)}$$

Facendo quindi

$$\cos L' = \frac{\operatorname{sen} P [\operatorname{sen} \zeta \cos P \cos \varpi \pm \cos \zeta \sqrt{(\operatorname{sen} \varpi^2 - \operatorname{sen} \zeta^2 \operatorname{sen} P^2)}]}{(1 - \operatorname{sen} \zeta^2 \operatorname{sen} P^2) \operatorname{sen} \varpi}$$

$$a = \frac{d \cdot \cos L'}{d \varpi}; b = \frac{d^2 \cdot \cos L'}{d \varpi^2}; c = \frac{d^3 \cdot \cos L'}{d \varpi^3}; \text{ec. ed inoltre}$$

$$\Phi \lambda' = a \cdot \sigma + \frac{b \cdot \sigma^2}{2} + \frac{c \cdot \sigma^3}{2 \cdot 3} + \text{ec.}$$

ne verrà l'equazione

$$0 = \cos L' - \cos \lambda' + \Phi \lambda'$$

Onde se noi ponghiamo come sopra (§ 74)

$$\frac{d \left[\frac{(\psi' \lambda')^m}{\text{sen } \lambda'} \right]}{d \lambda'} = (\psi' \lambda')^m; \quad \frac{d \left[\frac{(\psi'' \lambda')^m}{\text{sen } \lambda'} \right]}{d \lambda'} = (\psi'' \lambda')^m; \quad \frac{d \left[\frac{(\psi''' \lambda')^m}{\text{sen } \lambda'} \right]}{d \lambda'} = (\psi''' \lambda')^m; \text{ ec.}$$

otterremo

$$\lambda' = L' - \frac{\Phi L'}{\text{sen } L'} + \frac{d(\Phi' \lambda')^2}{2 \text{ sen } L'} - \frac{d^2(\Phi'' \lambda')^3}{2 \cdot 3 \text{ sen } L'} + \text{ ec.}$$

purchè dopo le differenziazioni si metta nel secondo membro di quest'equazione L' in luogo di λ' .

127. L' esempio precedente (§ 125), in cui si ommettono le potenze dell'eccentricità superiori alla quarta, può servire a rischiarare ancora questa seconda soluzione. Avremo pertanto $\Phi \lambda' = a \cdot \sigma + b \cdot \sigma^2$, ossia ritenendo le denominazioni di $\Lambda, \Pi, [1], [2]$ già stabilite

$$\Phi \lambda' = \frac{\Delta^2}{2^2} \cdot a \Lambda \Pi - \frac{\Delta^4}{2^5} a \left[\frac{\Lambda^2 \cos p'^6 \text{ sen } 2(V' + P)}{\text{sen } p'} (P - [1])^2 + 6 \text{ sen } p' (P(2 + \cos p'^2) - [1] \cos p'^2) \right]$$

$$- \frac{\Delta^4}{2^7} a \Lambda \cos p'^4 (2P(3 + 8 \text{ sen } (V' + P)^2) - 8[1](1 + 2 \text{ sen } (V' + P)^2) + [2])$$

$$+ \frac{\Delta^4}{2^5} b \Lambda^2 \Pi^2$$

$$(\Phi \lambda')^2 = \frac{\Delta^4}{2^4} a^2 \Lambda^2 \Pi^2$$

$$(\Phi' \lambda')^2 = \frac{d \left[\frac{(\Phi \lambda')^2}{\text{sen } \lambda'} \right]}{d \lambda'} = \frac{\Delta^4}{2^4} a^2 \frac{\Lambda \Pi}{\text{sen } \lambda'} \left(2 \Pi \frac{d \Lambda}{d \lambda'} + 2 \Lambda \frac{d \Pi}{d \lambda'} - \Lambda \Pi \cot \lambda' \right)$$

Sostituendo i trovati valori di $\frac{d \Lambda}{d \lambda'}$, $\frac{d \Pi}{d \lambda'}$, e facendo

$$A = \frac{dL'}{d\varpi}; B = \frac{d^2 L'}{d\varpi^2}, \text{ cosicchè abbiassi } a = -A \operatorname{sen} L';$$

$$b = -B \operatorname{sen} L' - A^2 \cos L', \text{ avremo}$$

$$\begin{aligned} \lambda' = L' + \frac{\Delta^2}{2^2} A \cdot \Lambda \Pi - \frac{\Delta^4}{2^5} A \left\{ \frac{\Lambda^2 \cos p' \operatorname{sen} 2(V' + P)}{\operatorname{sen} p'} \cdot (P - [1])^2 + 6 \operatorname{sen} p' (P(2 + \cos p'^2) \right. \\ \left. - [1] \cos p'^2) \right\} \\ - \frac{\Delta^4}{2^7} A \cdot \Lambda \cos p'^4 \left\{ 2P(3 + 8 \operatorname{sen}(V' + P)^2) - 8[1](1 + 2 \operatorname{sen}(V' + P)^2) + [2] \right\} \\ + \frac{\Delta^4}{2^5} B \cdot \Lambda^2 \Pi^2 - \frac{\Delta^4}{2^4} A^2 \cdot \Lambda^2 \Pi^2 \operatorname{tang} L' \left\{ 1 - 2 \Lambda \operatorname{sen}(V' + P)^2 \left[\operatorname{sen} p' + \frac{\cot V' \cot(V' + P)}{\operatorname{sen} p'} \right] \right. \\ \left. + \frac{\Delta^4}{2^3} A^2 \cdot \Lambda^2 \Pi \operatorname{tang} L' \left\{ (P \cos 2(V' + P) - [1]) \operatorname{sen} p'^2 - \cot V' (P \operatorname{sen} 2(V' + P) \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{sen} P \operatorname{sen}(2V' + P)) \right\} \right\} \end{aligned}$$

nella qual equazione le quantità $L', A, p', V', \Lambda, \Pi$ si otterranno colle precedenti (§ 125) sei formole, e B si avrà dalla formola

$$B = -A \cot \varpi (2 + A^2 \operatorname{sen} \varpi^2)$$

128. Possiamo dall' una o dall' altra soluzione di questo problema ricavare la latitudine cercata sullo sferoide ellittico indipendentemente dalla sfera inscritta, poichè l'arco L' , e le quantità $p', V', \Lambda, \Pi, A, B$ che da esso dipendono, rimangono le medesime tanto sulla sfera inscritta quanto sullo sferoide; onde, stando nell' esempio della seconda soluzione, basterà sostituire

$$(\S 33) \text{ in vece di } \lambda' \text{ il suo valore } \lambda - \frac{\Delta^2}{2^2} \operatorname{sen} 2\lambda +$$

$\frac{\Delta^4}{2^4} \text{sen } 2\lambda (2 + \cos 2\lambda)$, e col metodo sopra (§ 92) usato, si

troverà facilmente la cercata latitudine sullo sferoide, vale a dire, posta per brevità $= \nu$ la somma de' termini moltiplicati in Δ^4 nel precedente (§ 127) valore di λ' , si avrà

$$\lambda = L' + \frac{\Delta^2}{2^2} (\text{sen } 2L' + A \cdot \Delta \Pi) + \frac{\Delta^4}{2^3} A \cdot \Delta \Pi \cos 2L' \\ - \frac{\Delta^4}{2^4} \text{sen } 2L' (2 - \cos 2L') + \nu$$

Ommettendo ancora la quarta potenza dell' eccentricità, avremo

$$\lambda = L' + \frac{e^2}{2^2} \left[\text{sen } 2L' + A \text{sen } p' \left(2P + \frac{P - \text{sen } P \cos (2V' + P)}{1 - \cos p'^2 \text{sen } (V' + P)^2} \cdot \cos p'^2 \right) \right]$$

e le quantità L' , A , p' , V' si calcolano colle prime quattro formole sopra (§ 125) esposte.

129. Dalle due equazioni (§§ 27, 40)

$$x = z - z' - \frac{e^2}{2} \text{sen } p \left(P + \frac{\text{sen } P \cos v'}{\cos (v' + P)} \right)$$

$$v = v' + P - \frac{e^2}{2^2} \left[(P - 3 \text{sen } P \cos (2v' + P)) \cos p^2 - \frac{2 \cos v' \text{sen } p^2}{\cos (v' + P)} \right]$$

si ottiene un'altra espressione della latitudine λ indipendente dalla sfera inscritta; nell'ipotesi che si neglignentino la quarta e le più alte potenze dell' eccentricità.

Col metodo usato nella soluzione prima (§ 124), facendo per brevità

$$\Sigma = \frac{e^2}{2^2} \left\{ \frac{\text{sen } p}{1 - \cos p^2 \text{sen}(v' + P)^2} \cdot \left[\cos p^2 (P - 3 \text{sen } P \cos(2v' + P)) - \frac{2 \text{sen } p^2 \text{sen } P \cos v'}{\cos(v' + P)} \right] \right. \\ \left. + 2 \text{sen } p \left(P + \frac{\text{sen } P \cos v'}{\cos(v' + P)} \right) \right\}$$

si ha

$$\varpi + \Sigma = \text{Ang. tang} [\text{sen } p \text{ tang}(v' + P)] - \text{Ang. tang} [\text{sen } p \text{ tang } v'],$$

da cui si ricava

$$\text{tang}(\varpi + \Sigma) = \frac{\text{sen } \zeta \text{ tang } P}{\cos \lambda - \text{sen } \lambda \cos \zeta \text{ tang } P}$$

e per conseguenza sarà

$$\cos \lambda = \frac{\text{sen } P [\text{sen } \zeta \cos P \cos(\varpi + \Sigma) \pm \cos \zeta \sqrt{(\text{sen}(\varpi + \Sigma))^2 - \text{sen } \zeta^2 \text{sen } P^2}]}{(1 - \text{sen } \zeta^2 \text{sen } P^2) \text{sen}(\varpi + \Sigma)}$$

Dunque prendendo l'arco L' in maniera che sia

$$\cos L' = \frac{\text{sen } P [\text{sen } \zeta \cos P \cos \varpi \pm \cos \zeta \sqrt{(\text{sen } \varpi)^2 - \text{sen } \zeta^2 \text{sen } P^2}]}{(1 - \text{sen } \zeta^2 \text{sen } P^2) \text{sen } \varpi},$$

si avrà $\lambda = L' + \Sigma$. $\frac{dL'}{d\varpi}$, vale a dire

$$\lambda = L' + \frac{e^2}{2^2} A \left\{ \frac{\text{sen } p}{1 - \cos p^2 \text{sen}(v' + P)^2} \cdot \left[\cos p^2 (P - 3 \text{sen } P \cos(2v' + P)) - \frac{2 \text{sen } p^2 \text{sen } P \cos v'}{\cos(v' + P)} \right] \right. \\ \left. + 2 \text{sen } p \left(P + \frac{\text{sen } P \cos v'}{\cos(v' + P)} \right) \right\}$$

nella qual espressione è $\text{sen } p = \text{sen } \zeta \cos L'$; $\text{sen } v' = \frac{\text{sen } L'}{\cos p}$;

$$A = \frac{\text{sen } \zeta \text{ tang } P}{\text{sen } \varpi^2 (\text{sen } L' + \cos L' \cos \zeta \text{ tang } P)}.$$

130. Se l'angolo dato ζ è retto, si potrà ottenere la latitudine λ sostituendo nell'equazione (XIII) il valore dell'angolo $\psi = 90^\circ - \nu$ determinato precedentemente (§ 55), e seguendo le stesse tracce delle due date soluzioni (§§ 124 e seg.). Ma noi dedurremo più brevemente la latitudine λ dall'ultima equazione (§ 128). Essendo in questo caso $P' = 90^\circ$; $p' = 90^\circ - L'$, avremo le seguenti formole per calcolare la latitudine λ sui tre dati elementi $\zeta = 90^\circ, P, \varpi$, qualora non si tenga conto delle potenze dell'eccentricità superiori alla quarta

$$1) \cos L' = \tan P \cot \varpi$$

$$2) A = \frac{\cos L'}{\sin \varpi \cos \varpi}$$

$$3) B = -\frac{\cot L'}{\sin \varpi^2} \left(2 + \frac{\cot L'^2}{\cos \varpi^2} \right)$$

$$4) P' = P - [1] = P + \sin P \cos P$$

$$5) \Lambda = \frac{\cos L'}{1 - \sin L'^2 \cos P^2} = \frac{\sin 2 \varpi}{\sin 2 P}$$

$$6) \Pi = P' \sin L'^2 + 2 P \frac{\sin P^2}{\sin \varpi^2}$$

$$7) \lambda = L' + \frac{\Delta^2}{2} (\sin 2 L' + A \cdot \Lambda \Pi) + \frac{\Delta^4}{2^3} A \cdot \Lambda \Pi \cos 2 L' - \frac{\Delta^4}{2^4} \sin 2 L' (2 - \cos 2 L')$$

$$- \frac{\Delta^4}{2^4} A \cos L' \left(6 P + 3 P' \sin L'^2 - P^2 \sin L'^4 \tan L'^2 \frac{\sin \varpi^2 \cos \varpi^2}{\sin P \cos P} \right)$$

$$- \frac{\Delta^4}{2^6} A \cdot \Lambda \sin L'^4 [P' (3 + 10 \cos P^2) - 2 P \cos P^2]$$

$$+ \frac{\Delta^4}{2^3} \Lambda^2 \Pi^2 (B + A' \tan L' \cos 2 \varpi) + \frac{\Delta^4}{2^3} A^2 \cdot \Lambda^2 \Pi \sin L'^2 \tan L' (P' - 2 P \cos P^2)$$

P R O B L E M A X I

131. Dati nel triangolo sferoidico ellittico i tre elementi, λ , P , ϖ , trovare l'angolo ζ .

S O L U Z I O N E I

Conservando le denominazioni di τ , R , σ stabilite nella soluzione prima del problema X, avremo l'equazione

$$\operatorname{tang}(\varpi + \sigma) = \frac{\operatorname{sen} \zeta \operatorname{tang} P}{\cos \lambda' - \operatorname{sen} \lambda' \operatorname{tang} P \cos \zeta} = \frac{2 \operatorname{tang} P \operatorname{tang} \frac{1}{2} \zeta}{\cos(\lambda' + P) + \cos(\lambda' - P) \operatorname{tang} \frac{1}{2} \zeta^2}$$

Reciprocamente sarà

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \zeta = \frac{\operatorname{sen} P \cos(\varpi + \sigma) \pm \sqrt{[\operatorname{sen} P^2 - \cos \lambda'^2 \operatorname{sen}(\varpi + \sigma)^2]}}{\cos(\lambda' - P) \operatorname{sen}(\varpi + \sigma)}$$

Pongasi $\varpi + \sigma = u = \varpi + \Phi u$, cosicchè sia σ eguale ad una funzione di u , l'equazione $0 = \varpi - u + \Phi u$ ci somministrerà (§§ 43, 44) il valore di u , cioè

$$u = \varpi + \Phi \varpi + \frac{d(\Phi u)^2}{2 du} + \frac{d^2(\Phi u)^3}{2.3 d u^2} + \text{ec.}$$

e si metterà nel secondo membro di quest'equazione ϖ in luogo di u dopo tutte le differenziazioni. Essendo poi generalmente

$$\frac{d(\Phi u)^m}{d u} = m(\Phi u)^{m-1} \left(\frac{d \Phi u}{d \zeta} \right) \left(\frac{d \zeta}{d u} \right)$$

e dall'equazione precedente

$$\operatorname{tang} u = \frac{\operatorname{sen} \zeta \operatorname{tang} P}{\cos \lambda' - \operatorname{sen} \lambda' \cos \zeta \operatorname{tang} P} \text{ avendosi}$$

$$\frac{d \zeta}{d u} = \frac{1}{\cot \zeta \operatorname{sen} u \cos u - \operatorname{sen} \lambda' \operatorname{sen} u^2}$$

è evidente che tutti i termini $\frac{d(\Phi u)^m}{d u}$, $\frac{d^2(\Phi u)^m}{d u^2}$,

$\frac{d^3(\Phi u)^m}{d u^3}$, ec. saranno funzioni di u , ζ e delle costanti

λ' , P le quali si determineranno colla semplice differenziazione. Quindi l'angolo cercato ζ si otterrà sostituendo il trovato valore di u nell'equazione

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \zeta = \frac{\operatorname{sen} P \cos u \pm \sqrt{(\operatorname{sen} P^2 - \cos \lambda'^2 \operatorname{sen} u^2)}}{\cos (\lambda' - P) \operatorname{sen} u}.$$

132. Si cerchi per esempio l'angolo ζ per mezzo dei tre elementi λ' , P , π nel caso che si trascurino le potenze dell'eccentricità superiori alla quarta. Ritenute le denominazioni di [1], [2], Λ , Π adottate sopra (§ 125), si avrà

$$\begin{aligned} \Phi u = \sigma = \frac{\Delta^2}{2^2} \cdot \Lambda \Pi - \frac{\Delta^4}{2^5} & \left(\frac{\lambda'^2 \cos p'^6 \operatorname{sen} 2(V' + P)}{\operatorname{sen} p'} (P - [1])^2 \right. \\ & \left. + 6 \operatorname{sen} p' [P(2 + \cos p'^2) - [1] \cos p'^2] \right) \\ & - \frac{\Delta^4}{2^7} \cdot \Lambda \cos p'^4 \left(2P(3 + 3 \operatorname{sen}(V' + P)^2) - 3[1](1 + 2 \operatorname{sen}(V' + P)^2) + [2] \right) \\ (\Phi u)^2 = \frac{\Delta^4}{2^4} \cdot \Lambda^2 \Pi^2 \end{aligned}$$

$$\frac{d(\Phi u)^2}{2 \, d \, u} = \frac{\Delta^4}{2^4} \cdot \Lambda \Pi \cdot \left(\frac{d \, \zeta}{d \, u} \right) \left(\Pi \frac{d \, \Lambda}{d \, \zeta} + \Lambda \frac{d \, \Pi}{d \, \zeta} \right)$$

e sarà

$$\begin{aligned} \frac{d \, \Lambda}{d \, \zeta} &= \frac{\Lambda}{\operatorname{sen} p'} \cdot \frac{d \cdot \operatorname{sen} p'}{d \, \zeta} + 2 \, \Lambda^2 \cot p' \operatorname{sen}(V' + P)^2 \left(\frac{d \cdot \cos p'}{d \, \zeta} + \cos p' \cot(V' + P) \cdot \frac{d \, V'}{d \, \zeta} \right) \\ \frac{d \, \Pi}{d \, \zeta} &= 2(P \cos 2(V' + P) - [1]) \cos p' \cdot \frac{d \cdot \cos p'}{d \, \zeta} - 2 \cos p'^2 \left[P \operatorname{sen} 2(V' + P) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{sen} P \operatorname{sen}(2 V' + P) \right] \left(\frac{d \, V'}{d \, \zeta} \right) \end{aligned}$$

Sostituendo pertanto i trovati (§ 73) valori di $\frac{d \cdot \operatorname{sen} p'}{d \, \zeta}$;

$\frac{d \cdot \cos p'}{d \, \zeta}$; $\frac{d \, V'}{d \, \zeta}$, ne verrà

$$\begin{aligned} \frac{d \, \Lambda}{d \, \zeta} &= \Lambda \cot \zeta - 2 \, \Lambda^2 \operatorname{sen} p' \cot \zeta \operatorname{sen}(V' + P)^2 (1 - \operatorname{tang} V' \cot(V' + P)) \\ &= \Lambda [\cot \zeta - 2 \, \Lambda \cos p' \operatorname{sen} P \operatorname{sen}(V' + P)] \\ \frac{d \, \Pi}{d \, \zeta} &= -2 \operatorname{sen} p'^2 \cot \zeta \left[P \cos 2(V' + P) - [1] + \operatorname{tang} V' (P \operatorname{sen} 2(V' + P) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{sen} P \operatorname{sen}(2 V' + P)) \right] \end{aligned}$$

$$= -2 \operatorname{sen} p' \cos p' [P \cos(V' + 2 P) - \operatorname{sen} P \cos(V' + P)]$$

Quindi se noi supponiamo che ζ diventi H allorchè

si mette π in luogo di u , e sia in questo caso $\Lambda = \frac{dH}{d\pi}$,

avremo le seguenti formole per determinare l'angolo cercato ζ :

$$1) \operatorname{tang} \frac{1}{2} H = \frac{\operatorname{sen} P \cos \varpi \pm \sqrt{(\operatorname{sen} P^2 - \cos \lambda'^2 \operatorname{sen} \varpi^2)}}{\cos (\lambda' - P) \operatorname{sen} \varpi}$$

$$2) A = \frac{1}{\operatorname{sen} \varpi (\cos \varpi \cot H - \operatorname{sen} \varpi \operatorname{sen} \lambda')}$$

$$3) \operatorname{sen} p' = \operatorname{sen} H \cos \lambda'$$

$$4) \operatorname{sen} V' = \frac{\operatorname{sen} \lambda'}{\cos p'}$$

$$5) \Lambda = \frac{\operatorname{sen} p'}{1 - \cos p'^2 \operatorname{sen} (V' + P)^2}$$

$$6) \Pi = (P - [1]) \cos p'^2 + \frac{2 P \operatorname{sen} p'}{\Lambda}$$

$$\begin{aligned} 7) u = \varpi + \frac{\Delta^2}{2^2} \cdot \Lambda \Pi - \frac{\Delta^4}{2^5} & \left[\frac{\Lambda^2 \cos p'^6 \operatorname{sen} 2(V' + P)}{\operatorname{sen} p'} (P - [1])^2 \right. \\ & \left. + 6 \operatorname{sen} p' [P(2 + \cos p'^2) - [1] \cos p'^2] \right] \\ & - \frac{\Delta^4}{2^7} \cdot \Lambda \cos p'^4 \left(2P(3 + 8 \operatorname{sen} (V' + P)^2) - 8[1](1 + 2 \operatorname{sen} (V' + P)^2) + [2] \right) \\ & + \frac{\Delta^4}{2^4} A \cdot \Lambda^2 \Pi^2 [\cot H - 2 \Lambda \cos p' \operatorname{sen} P \operatorname{sen} (V' + P)] \\ & - \frac{\Delta^4}{2^3} A \cdot \Lambda^2 \Pi \operatorname{sen} p' \cos p' [P \cos (V' + 2P) - \operatorname{sen} P \cos (V' + P)] \end{aligned}$$

nella qual formola è

$$[1] = \operatorname{sen} P \cos (2 V' + P); [2] = \operatorname{sen} 2 P \cos 2 (2 V' + P)$$

$$8) \operatorname{tang} \frac{1}{2} \zeta = \frac{\operatorname{sen} P \cos u \pm \sqrt{(\operatorname{sen} P^2 - \cos \lambda'^2 \operatorname{sen} u^2)}}{\cos (\lambda' - P) \operatorname{sen} u}$$

S O L U Z I O N E 2

133. Dalla soluzione prima si hanno le due equazioni $\text{tang} \frac{1}{2} \zeta = \frac{\text{sen } P \cos(\varpi + \sigma) \pm \sqrt{[\text{sen } P^2 - \cos \varpi^2 \text{sen}(\varpi + \sigma)^2]}}{\cos(\varpi' - P) \text{sen}(\varpi + \sigma)}$;

$$\text{tang} \frac{1}{2} H = \frac{\text{sen } P \cos \varpi \pm \sqrt{(\text{sen } P^2 - \cos \varpi^2 \text{sen} \varpi^2)}}{\cos(\varpi' - P) \text{sen} \varpi} .$$

Onde se ponghiamo

$$a = \frac{d \cdot \text{tang} \frac{1}{2} H}{d \varpi} ; b = \frac{d^2 \cdot \text{tang} \frac{1}{2} H}{d \varpi^2} ; c = \frac{d^3 \cdot \text{tang} \frac{1}{2} H}{d \varpi^3} ; \text{ec.}$$

$$\text{e di più } \Phi \zeta = a \cdot \sigma + \frac{b \cdot \sigma^2}{2} + \frac{c \cdot \sigma^3}{2 \cdot 3} + \text{ec.}$$

ne verrà l'equazione

$$0 = \text{tang} \frac{1}{2} H - \text{tang} \frac{1}{2} \zeta + \Phi \zeta$$

Quindi facendo

$$\frac{d[(\Phi \zeta)^m \cos \frac{1}{2} \zeta^2]}{d \zeta} = (\Phi' \zeta)^m ; \frac{d[(\Phi' \zeta)^m \cos \frac{1}{2} \zeta^2]}{d \zeta} = (\Phi'' \zeta)^m ; \text{ec.}$$

avremo (§ 31)

$$\zeta = H + 2 \Phi H \cdot \cos \frac{1}{2} H^2 + \frac{2^2 (\Phi' \zeta)^2 \cdot \cos \frac{1}{2} H^2}{2} + \frac{2^3 (\Phi'' \zeta)^3 \cdot \cos \frac{1}{2} H^2}{2 \cdot 3} + \text{ec.}$$

avvertendo di porre nel secondo membro H in luogo di ζ dopo le differenziazioni.

134. Stando nel precedente esempio, in cui si omettono la sesta e le più alte potenze dell'eccentrici-

tà, si avrà semplicemente $\Phi \xi = a \cdot \sigma + \frac{b \cdot \sigma^2}{2}$, vale a dire (§ 132)

$$\begin{aligned} \Phi \xi &= \frac{\Delta^2}{2^2} a \cdot \Lambda \Pi - \frac{\Delta^4}{2^5} a \left(\frac{\Lambda^2 \cos p' \cdot \sin 2(V' + P)}{\sin p'} \cdot (P - [1])^2 + 6 \sin p' [P(2 + \cos p'^2) \right. \\ &\quad \left. - [1] \cos p'^2] \right) \\ &\quad - \frac{\Delta^4}{2^7} a \cdot \Lambda \cos p'^4 \left(2P(3 + 8 \sin(V' + P)^2) - 8[1](1 + 2 \sin(V' + P)^2) + [2] \right) \\ &\quad + \frac{\Delta^4}{2^5} b \cdot \Lambda^2 \Pi^2 \end{aligned}$$

$$(\Phi \xi)^2 = \frac{\Delta^4}{2^4} a^2 \cdot \Lambda^2 \Pi^2$$

$$(\Phi' \xi)^2 = \frac{d[(\Phi \xi)^2 \cdot \cos \frac{1}{2} \xi^2]}{d \xi} = \frac{\Delta^4}{2^4} a^2 \cdot \Lambda \Pi \cos \frac{1}{2} \xi^2 \left[2 \Pi \frac{d \Lambda}{d \xi} + 2 \Lambda \frac{d \Pi}{d \xi} - \Lambda \Pi \tan g \frac{1}{2} \xi \right]$$

Quindi sostituendo i trovati (§ 132) valori di $\frac{d \Lambda}{d \xi}$, $\frac{d \Pi}{d \xi}$,

mettendo H in luogo di ξ , e facendo $A = \frac{dH}{d\sigma}$; $B = \frac{d^2 H}{d\sigma^2}$,

di maniera che sia $a = \frac{A}{2 \cos \frac{1}{2} H^2}$; $b = \frac{B + A^2 \tan g \frac{1}{2} H}{2 \cos \frac{1}{2} H^2}$,

l'equazione $\xi = H + 2 \Phi H \cdot \cos \frac{1}{2} H^2 + \frac{2^2 (\Phi' \xi)^2 \cdot \cos \frac{1}{2} H^2}{2}$

diventerà

$$\begin{aligned} \xi &= H + \frac{\Delta^2}{2^2} A \cdot \Lambda \Pi - \frac{\Delta^4}{2^5} A \left(\frac{\Lambda^2 \cos p' \cdot \sin 2(V' + P)}{\sin p'} (P - [1])^2 + 6 \sin p' [P(2 + \cos p'^2) \right. \\ &\quad \left. - [1] \cos p'^2] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\Delta^4}{2^7} A \cdot \Lambda \cos p' \left(2P(3 + 8 \operatorname{sen}(V' + P)^2) - 8[1](1 + 2 \operatorname{sen}(V' + P)^2) + [2] \right) \\
& + \frac{\Delta^4}{2^5} \cdot \Lambda^2 \Pi [B + 2A^2 (\cot H - 2 \Lambda \cos p' \operatorname{sen} P \operatorname{sen}(V' + P))] \\
& - \frac{\Delta^4}{2^3} A^2 \cdot \Lambda^2 \Pi \operatorname{sen} p' \cos p' [P \cos(V' + 2P) - \operatorname{sen} P \cos(V' + P)]
\end{aligned}$$

Della qual espressione le quantità $H, A, p', V', \Lambda, \Pi$ si calcoleranno colle sei prime formole precedenti (§ 132), e B si avrà dalla formola

$$B = A^2 \left[\operatorname{sen} \varpi \cos \varpi \left(2 \operatorname{sen} \lambda' + \frac{A}{\operatorname{sen} H^2} \right) - \cos 2 \varpi \cot H \right]$$

135. Tenendo conto solamente del quadrato dell'eccentricità, si avrà

$$\zeta = H + \frac{e^2}{2^1} A \cdot \Lambda \Pi$$

Volendo poi rendere quest'espressione indipendente dalla sfera inscritta, bisognerà prendere un angolo h tale che si abbia

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} h = \frac{\operatorname{sen} P \cos \varpi \pm \sqrt{(\operatorname{sen} P^2 - \cos \lambda^2 \operatorname{sen} \varpi^2)}}{\cos(\lambda - P) \operatorname{sen} \varpi}$$

ed essendo (§ 33), quando si ommettono le potenze dell'eccentricità superiori al quadrato, $\lambda' = \lambda - \frac{e^2}{2^1} \operatorname{sen} 2 \lambda$,

ne verrà $H = h - \frac{e^2}{2^1} \operatorname{sen} 2 \lambda \cdot \left(\frac{d h}{d \lambda} \right)$. Ma l'equazione (§ 131)

$$\operatorname{tang} \varpi = \frac{\operatorname{sen} h \operatorname{tang} P}{\cos \lambda - \operatorname{sen} \lambda \cos h \operatorname{tang} P}, \text{ da cui si è dedotto}$$

il valore precedente di $\tan \frac{1}{2} h$, ci dà

$$\frac{dh}{d\lambda} = \frac{\tan \varpi (\sin \lambda \cot P + \cos \lambda \cos h)}{\sin \lambda \sin h - \cos h}. \text{ Laonde facendo } \frac{dh}{d\lambda} = M,$$

avremo

$$\zeta = h - \frac{e^2}{2} (M \sin 2\lambda - A \cdot \Lambda \Pi);$$

l'angolo h si calcolerà colla formola precedente che dà

il valore di $\tan \frac{1}{2} h$, ed M col valore trovato di $\frac{dh}{d\lambda}$;

sarà in seguito $\sin p = \sin h \cos \lambda$; $\sin V' = \frac{\sin \lambda}{\cos p}$;

$$A = \frac{1}{\sin \varpi (\cos \varpi \cot h - \sin \varpi \sin \lambda)}; \quad \Lambda = \frac{\sin p}{1 - \cos p^2 \sin(V' + P)^2};$$

$$\Pi = (P - \sin P \cos(2V' + P)) \cos p^2 + \frac{2P \sin p}{\Lambda}.$$

136. Anche dalle due equazioni esprimenti i valori di v e di ϖ (§§ 27, 40) si può avere l'angolo ζ senza passare per le latitudini sulla sfera inscritta. Imperciocchè, ritenendo il valore di Σ sopra (§ 129) stabilito, nel caso che si neglignentino le potenze dell'eccen-

tricità superiori al quadrato, si avrà $\zeta = h + \Sigma \cdot \left(\frac{dh}{d\varpi}\right)$,

vale a dire

$$\begin{aligned} \zeta = h + \frac{e^2}{2} A \left(\Lambda \left[\cos p^2 (P - 3 \sin P \cos(2v' + P)) - \frac{2 \sin p^2 \sin P \cos v'}{\cos(v' + P)} \right] \right. \\ \left. + 2 \sin p \left[P + \frac{\sin P \cos v'}{\cos(v' + P)} \right] \right) \end{aligned}$$

nella qual espressione le quantità h, p, A si calcoleranno colle formole ora (§ 135) accennate, e sarà inoltre

$$\operatorname{sen} v' = \frac{\operatorname{sen} \lambda}{\cos p}; \quad \Lambda = \frac{\operatorname{sen} p}{1 - \cos p^2 \operatorname{sen}(v' + P)^2}.$$

P R O B L E M A X I I

137. Dati nel triangolo sferoidico ellittico i tre elementi ζ, θ, λ , trovare la latitudine ϕ .

S O L U Z I O N E

La soluzione di questo problema è facilissima, poichè chiamando λ', ϕ' le latitudini sulla sfera inscritta corrispondenti a λ, ϕ , l'equazione (XIV) ci dà immediatamente

$$\cos \phi' = \frac{\operatorname{sen} \zeta}{\operatorname{sen} \theta} \cos \lambda'$$

e dal valore di ϕ' si dedurrà (§ 33) quello di ϕ . Se poi si vuol prescindere dalle latitudini sulla sfera inscritta, l'equazione (§ 22)

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\operatorname{sen} \zeta \cos \lambda}{\cos \phi} \sqrt{\left(\frac{1 + \Delta^2 \cos \phi^2}{1 + \Delta^2 \cos \lambda^2} \right)}$$

ci darà

$$\cos \phi = \frac{\operatorname{sen} \zeta}{\operatorname{sen} \theta} \cos \lambda \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \Delta^2 \cos \lambda^2 \left(1 - \frac{\operatorname{sen} \zeta^2}{\operatorname{sen} \theta^2} \right) \right]}}.$$

138. Ci resta ora da mostrare che le soluzioni dei

dodici precedenti problemi bastano a risolvere i venti casi che si possono proporre in un triangolo sferoidico elittico. La Tavola seguente contiene l'indice di questi casi, ed in essa si rileva che le soluzioni del 3^{zo} e del 4^{to} si deducono dal caso 2^{do}, ovvero si hanno mediante l'equa-

zione (XIV), vale a dire $\text{sen } \zeta = \frac{\cos \phi'}{\cos \lambda'} \text{sen } \theta$; $\cos \lambda' = \frac{\text{sen } \theta}{\text{sen } \zeta} \cos \phi'$.

I casi 6, 9, 12, 15, 18, 20 rientrano ne' casi rispettivamente precedenti 5, 8, 11, 14, 17, 19 cangiando θ in $180^\circ - \zeta$, ϕ in λ e viceversa. Possiamo dunque conchiudere, che nei proposti problemi si comprendono tutte le principali questioni della trigonometria sferoidica.

I N D I C E

DEI PROBLEMI

DELLA TRIGONOMETRIA SFEROIDICA

	<i>Elementi dati.</i>	<i>Elementi cercati.</i>
1	λ, ϕ, ζ	P, ϖ, θ dal problema I
2	λ, ϕ, θ	P, ϖ, ζ dal I mutando ϕ in λ, θ in $180^\circ - \zeta$ e viceversa
3	λ, ζ, θ	ϕ dal XII. P, ϖ dal I
4	ϕ, ζ, θ	λ dal XII mutando ϕ in λ, θ in $180^\circ - \zeta$; P, ϖ dal I
5	λ, ζ, P	ϕ dal II; ϖ, θ dal I
6	ϕ, θ, P	λ come 5 ^{to} mutando ϕ in λ, θ in $180^\circ - \zeta$ e viceversa
7	λ, ϕ, P	ζ dal III; ϖ, θ dal I
8	ϕ, ζ, P	λ dal IV; ϖ, θ dal I
9	λ, θ, P	ϕ come 3 ^{vo} mutando λ in ϕ, θ in $180^\circ - \zeta$
10	ζ, θ, P	λ dal V; ϕ dal XII; ϖ dal I
11	λ, ζ, ϖ	ϕ dal VI; P, θ dal I
12	ϕ, θ, ϖ	λ come 11 ^{mo} mutando ϕ in λ, θ in $180^\circ - \zeta$ e viceversa
13	λ, ϕ, ϖ	ζ dal VII; P, θ dal I
14	ϕ, ζ, ϖ	λ dall' VIII; P, θ dal I
15	λ, θ, ϖ	ϕ come 14 ^{mo} mutando λ in ϕ, ζ in $180^\circ - \theta$
16	ζ, θ, ϖ	λ dal IX; ϕ dal caso 3 ^{zo} ; P dal I
17	ζ, P, ϖ	λ dal X; ϕ dal II; θ dal I
18	θ, P, ϖ	ϕ come 17 ^{mo} mutando λ in ϕ, ζ in $180^\circ - \theta$
19	λ, P, ϖ	ζ dall' XI; ϕ dal II; θ dal I
20	ϕ, P, ϖ	θ come 19 ^{mo} mutando ϕ in λ, ζ in $180^\circ - \theta$

Nell' ultima colonna di questa Tavola sono indicati co' numeri romani I, II, III, ec. i problemi donde ricavansi i tre elementi incogniti. Così, per esempio, nel caso 5.^{to} dati i tre elementi λ, ζ, P , si trova in primo luogo ϕ col problema II, in seguito dagli elementi λ, ζ, ϕ si trovano ϖ, θ col problema I.

139. Ma, dirà forse taluno, non si potrebb' egli nel citato caso 5.^{to} trovare l' angolo θ per mezzo dei tre elementi λ, ζ, P senza esser obbligato a cercare prima l' elemento ϕ ? Non v' ha dubbio che ciò si possa fare. In fatti, avendosi (§ 88) l' equazione

$$\cot \theta = \frac{\cos \zeta \cos (P - \tau) - \operatorname{tang} \lambda' \operatorname{sen} (P - \tau)}{\operatorname{sen} \zeta}, \text{ col metodo}$$

usato nelle precedenti soluzioni si otterranno le seguenti formole per calcolare l' angolo θ su i dati elementi λ, ζ, P allorchè si neglignentano la sesta e le più alte potenze dell' eccentricità (*)

$$1) \cot G = \frac{\cos \zeta \cos P - \operatorname{tang} \lambda' \operatorname{sen} P}{\operatorname{sen} \zeta}$$

$$2) \quad A = \left(\frac{dG}{dP} \right) = \frac{\operatorname{sen} G^2 (\cos \zeta \operatorname{sen} P + \operatorname{tang} \lambda' \cos P)}{\operatorname{sen} \zeta}$$

$$3) \quad B = \left(\frac{d^2 G}{dP^2} \right) = \operatorname{sen} G \cos G (1 + 2A^2)$$

$$4) \operatorname{sen} p' = \operatorname{sen} \zeta \cos \lambda'$$

(*) In vece della formola 1) si possono usare le due seguenti

$$\operatorname{tang} \xi = \cos \zeta \cot \lambda'; \cot H = \frac{\cot \zeta \operatorname{sen} (\xi - P)}{\operatorname{sen} \xi}.$$

$$5) \operatorname{sen} V' = \frac{\operatorname{sen} \lambda'}{\cos p'}$$

$$6) \cos V = \operatorname{tang} p' \cot G; \text{ oppure } V = V' + P$$

$$7) \theta = G - \frac{\Delta^2}{2^2} A \cos p'^2 (P - [1]) + \frac{\Delta^4}{2^4} A \cos p'^4 (14P - 16[1] + [2]) \\ + \frac{\Delta^4}{2^5} B \cos p'^4 \cdot (P - [1])^2 - \frac{\Delta^4}{2^4} A^2 (P - [1]) \frac{\operatorname{sen} p' \cos p'^3 \cos 2V}{\operatorname{sen} G^2 \operatorname{sen} V}$$

avvertendo che si ha

$$[1] = \operatorname{sen} P \cos (2V' + P); [2] = \operatorname{sen} 2P \cos 2(2V' + P)$$

140. Nella citata equazione

$$\cot \theta = \frac{\cos \zeta \cos (P - \tau) - \operatorname{tang} \lambda' \operatorname{sen} (P - \tau)}{\operatorname{sen} \zeta} \text{ pongasi } \phi' \text{ in luogo}$$

di λ' , ζ in luogo di $180^\circ - \theta$, e viceversa, avremo

$$\cot \zeta = \frac{\cos \theta \cos (P - \tau) + \operatorname{tang} \phi' \operatorname{sen} (P - \tau)}{\operatorname{sen} \theta}, \text{ da cui si ricava}$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \theta = \frac{-\cos \zeta \cos \phi' \pm \sqrt{[\cos \phi'^2 - \operatorname{sen} \zeta^2 \operatorname{sen} (P - \tau)^2]}}{\operatorname{sen} \zeta \cos (\phi' + P - \tau)}.$$

Si potrà pertanto nel caso 8.^{vo} dedurre l'angolo θ dai tre dati elementi ϕ' , ζ , P colle seguenti formole, qualora non si tenga conto della sesta e delle più alte potenze dell'eccentricità (*)

(*) Per l'uso de' logaritmi in luogo della formola 1) saranno più comode le due seguenti

$$\operatorname{tang} \zeta = \cos P \operatorname{tang} \phi'; \operatorname{sen} (G - \zeta) = \frac{\operatorname{tang} P \operatorname{sen} \zeta}{\cot \phi'}.$$

$$1) \operatorname{tang} \frac{1}{2} G = \frac{-\cos \zeta \cos \varphi' \pm \sqrt{(\cos \varphi'^2 - \operatorname{sen} \zeta^2 \operatorname{sen} P^2)}}{\operatorname{sen} \zeta \cos (\varphi' + P)}$$

$$2) A = \frac{\operatorname{sen} G}{1 + \cos G \operatorname{tang} \varphi' \operatorname{tang} P} (\operatorname{tang} \varphi' - \cos G \operatorname{tang} P)$$

$$3) B = \frac{\operatorname{sen} G}{1 + \cos G \operatorname{tang} \varphi' \operatorname{tang} P} \left[A \operatorname{tang} P (2 \operatorname{sen} G + A \operatorname{tang} \varphi') - \frac{\cos G}{\cos P^2} \right] - A \operatorname{tang} P$$

$$4) \operatorname{sen} p' = \operatorname{sen} G \cos \varphi'$$

$$5) \cos V' = \operatorname{tang} p' \cot \zeta$$

$$6) \operatorname{sen} V = \frac{\operatorname{sen} \varphi'}{\cos p'}; \text{ ovvero } V = V' + P$$

$$7) \theta = G - \frac{\Delta^2}{2^2} A \cos p'^2 (P - [1]) + \frac{\Delta^4}{2^4} A \cos p'^4 (14P - 16[1] + [2])$$

$$+ \frac{\Delta^4}{2^5} \cos p'^4 \cdot (P - [1])^2 \cdot (B + 4 A^2 \cot G \operatorname{tang} p'^2)$$

$$- \frac{\Delta^4}{2^4} A^2 \cot G \cos p'^2 \cdot (P - [1]) (\operatorname{sen} p'^2 \operatorname{tang} V \cos 2V - \cot V \cos 2V)$$

141. Essendosi trovata (§ 118) nel problema IX l'equazione $\cos \theta = \cos \zeta \cos (\varpi + \sigma) - \operatorname{sen} \zeta \operatorname{sen} (\varpi + \sigma) \operatorname{sen} \lambda'$, nella stessa ipotesi, in cui si ommettono le potenze dell'eccentricità superiori alla quarta, potremo nel caso 11.^{mo} ricavare immediatamente l'angolo θ dai tre dati elementi λ' , ζ , ϖ colle seguenti formole (*)

(*) Alla formola 1) si possono sostituire queste due

$$\operatorname{tang} \zeta = \operatorname{sen} \lambda' \operatorname{tang} \varpi; \cos G = \frac{\cos \varpi \cos (\zeta + \xi)}{\operatorname{sen} \xi}$$

$$1) \cos G = \cos \zeta \cos \varpi - \operatorname{sen} \zeta \operatorname{sen} \varpi \operatorname{sen} \lambda'$$

$$2) A = \frac{dG}{d\varpi} = \cos \zeta \operatorname{sen} \varpi + \operatorname{sen} \zeta \cos \varpi \operatorname{sen} \lambda'$$

$$3) B = \frac{d}{d\varpi^2} G = \cot G (1 - A^2)$$

$$4) \operatorname{sen} p' = \operatorname{sen} \zeta \cos \lambda'$$

$$5) \operatorname{sen} V' = \frac{\operatorname{sen} \lambda'}{\cos p'}$$

$$6) \cos V = \operatorname{tang} p' \cot G$$

$$7) \theta = G + \left[\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2^4} (1 + \operatorname{sen} p'^2) \right] A(V - V') \operatorname{sen} p' + \frac{e^4}{2^4} A \operatorname{sen} p' \cos p'^2 \cdot [1] \\ + \frac{e^4}{2^3} B(V - V')^2 \operatorname{sen} p'^2 + \frac{e^4}{2^2} A^2 (V - V') \frac{\operatorname{sen} p'^2 \operatorname{tang} p'}{\operatorname{sen} G^2 \operatorname{sen} V'}$$

142. Cangiando λ' in ϕ' , ζ in $180^\circ - \theta$ e viceversa nella medesima equazione del problema IX, essa diventa $\cos \zeta = \cos \theta \cos (\varpi + \sigma) + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} (\varpi + \sigma) \operatorname{sen} \phi'$, donde si ricava

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \theta = \frac{\operatorname{sen} \phi' \operatorname{sen} (\varpi + \sigma) \pm \sqrt{[\operatorname{sen} \zeta^2 - \cos \phi'^2 \operatorname{sen} (\varpi + \sigma)^2]}}{\cos \zeta + \cos (\varpi + \sigma)}$$

Quindi nel caso 14.^{mo} si potrà ottenere l'angolo θ dai tre dati elementi ϕ' , ζ , ϖ usando le formole seguenti quando si tralasciano le potenze dell'eccentricità superiori alla quarta (*)

(*) L'angolo G si calcolerà più facilmente co' logaritmi sostituendo alla formola 1) le due seguenti

$$\operatorname{tang} \zeta = \operatorname{sen} \phi' \operatorname{tang} \varpi; \cos (G - \zeta) = \frac{\cos \zeta \cos \xi}{\cos \varpi}.$$

$$1) \operatorname{tang} \frac{1}{2} G = \frac{\operatorname{sen} \phi' \operatorname{sen} \varpi \pm \sqrt{(\operatorname{sen} \zeta^2 - \cos \phi^2 \operatorname{sen} \varpi^2)}}{\cos \zeta + \cos \varpi}$$

$$2) A = \frac{dG}{d\varpi} = \frac{\operatorname{sen} \phi' - \operatorname{tang} \varpi \cot G}{1 - \operatorname{tang} \varpi \cot G \operatorname{sen} \phi'}$$

$$3) B = \frac{dG}{d\varpi^2} = \frac{1 - A \operatorname{sen} \phi'}{1 - \operatorname{tang} \varpi \cot G \operatorname{sen} \phi'} \left(\frac{A \operatorname{tang} \varpi}{\operatorname{sen} G^2} - \frac{\cot G}{\cos \varpi^2} \right)$$

$$4) \operatorname{sen} p' = \operatorname{sen} G \cos \phi'$$

$$5) \cos V' = \operatorname{tang} p' \cot \zeta$$

$$6) \operatorname{sen} V = \frac{\operatorname{sen} \phi'}{\cos p'}$$

$$7) \theta = G + \left[\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2^4} (1 + \operatorname{sen} p'^2) \right] A(V - V') \operatorname{sen} p' + \frac{e^4}{2^4} A \operatorname{sen} p' \cos p'^2. [1]$$

$$+ \frac{e^4}{2^3} (V - V')^2 \operatorname{sen} p'^2 (B + 2 A^2 \cot G)$$

$$+ \frac{e^4}{2^3} A^2 (V - V') \operatorname{tang} p'^2 \cot G (\operatorname{sen} p'^2 \operatorname{tang} V + \cot V')$$

143. Queste soluzioni dirette però non abbreviano notabilmente il calcolo dell'angolo θ , poichè dal precedente indice de' problemi e dalle date soluzioni di essi è manifesto, che ci fanno solamente risparmiare la

formola $\operatorname{sen} \theta = \frac{\cos \lambda'}{\cos \phi'} \operatorname{sen} \zeta$ la quale, essendo semplicissima,

co' logaritmi si calcola facilmente. Altronde accadrà rare volte, che dai tre dati elementi abbiassi a ricavare un solo dei tre elementi incogniti; il caso più frequente sarà quello, in cui si dovranno determina-

re tutti e tre, ed allora converrà attenersi alle regole accennate nell' indice de' problemi.

144. Abbiamo dato solamente due soluzioni di ciascun problema, ma ognuno vede facilmente che se ne potevano dare tante, quante sono le funzioni colle quali si può esprimere l'elemento cercato. Così, per esempio, nel caso 5^{to}, in cui si cerca ϕ per mezzo degli e-

lementi λ, ξ, P , abbiamo determinato $V = \text{Ang. sen} \left[\frac{\text{sen } \phi'}{\cos p'} \right]$

nell'unica soluzione data del problema II, si potevano però aggiungere due altre soluzioni analoghe a quelle de' problemi precedenti, servendoci dell'equazione

$$\text{sen } \phi' = \text{sen } \lambda' \cos (P - \tau) + \cos \lambda' \cos \xi \text{sen} (P - \tau).$$

Una quarta

soluzione si avrebbe cercando (§ 139) prima θ , e determinando in seguito ϕ' coll'equazione $\cos \phi' = \frac{\text{sen } p'}{\text{sen } \theta}$.

Anzi si poteva variare la soluzione data in maniera da ottenere il valore di V sotto la forma, a cui l'abbiamo ridotto posteriormente (§ 51) nell'esempio di quella soluzione.

145. A compimento di questi elementi dovremmo ora applicare le formole trovate ad alcuni casi pratici, ma oltrechè l'applicazione è per se stessa facilissima, ne abbiamo già dato altrove (*) qualche esempio. Gioverà

(*) *Monatliche correspondenz zur beförderung der Erd und Himmelskunde*, herausgegeben vom Freyherrn F. von Zach. XI Band. Gotha 1805.
 Effemeridi astronomiche di Milano per gli anni 1807, 1808 e segu.

però notare, che le quantità indicate colle lettere A, B, p', P', V , le quali entrano ne' termini moltiplicati nell'eccentricità supposta assai piccola, possono valutarsi solamente in gradi ed in minuti primi, ovvero fino ai millesimi dell' unità. Ma gli archi o angoli espressi dalle prime ed ultime formole negli esempj delle soluzioni prime dovendo calcolarsi con maggior esattezza, converrà per l'uso de' logaritmi servirsi delle note regole della trigonometria sferica, le quali ne' proposti problemi si riducono alle seguenti.

$$(\S 73) \dots \dots \text{tang } \frac{1}{2} H = \sqrt{\frac{\text{sen } \frac{1}{2}(\lambda' - \phi' + P) \cos \frac{1}{2}(\lambda' + \phi' + P)}{\text{sen } \frac{1}{2}(-\lambda' + \phi' + P) \cos \frac{1}{2}(\lambda' + \phi' - P)}}$$

$$(\S 80) \dots \dots \text{tang } \xi = \cos \zeta \text{ tang } P ; \text{sen}(L' + \xi) = \frac{\text{sen } \phi' \cos \xi}{\cos P}$$

$$(\S 89) \dots \dots \text{tang } \xi = \cos P \text{ tang } \zeta ; \text{tang } L' = \frac{\cot P \text{sen}(\xi - \zeta)}{\text{sen } \xi}$$

Sostituendo ϵ in luogo di P si avrà nella prima formola $\text{tang } \frac{1}{2} \zeta$ invece di $\text{tang } \frac{1}{2} H$, e nelle altre si avrà λ' invece di L' . Parimente sostituendo nelle formole seguenti u in luogo di ϖ , si avranno ϕ', ζ, λ' invece di F', H, L' .

$$(\S 97) \dots \dots \text{tang } \xi = \text{sen } \lambda' \text{ tang } \zeta ; \text{tang } F' = \frac{\text{tang } \lambda' \text{sen}(\varpi + \xi)}{\text{sen } \xi}$$

$$(\S 105) \dots \dots \text{tang } \xi = \cos \varpi \cot \phi' ; \text{tang } H = \frac{\text{tang } \varpi \text{sen } \xi}{\cos(\lambda' + \xi)}$$

$$(\S 111) \dots \dots \text{tang } \xi = \cos \varpi \cot \phi' ; \cos(L' + \xi) = \frac{\text{tang } \varpi \text{sen } \xi}{\text{tang } \zeta}$$

$$(\S 119) \dots \operatorname{tang}(45^\circ - \frac{1}{2}L') = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\zeta - \theta + \varpi) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\zeta + \theta + \varpi)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(-\zeta + \theta + \varpi) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\zeta + \theta - \varpi)}}$$

Mettendo nelle seguenti formole u in luogo di ϖ , si avranno λ' , ζ invece di L' , H .

$$(\S 125) \dots \operatorname{tang} \xi = \cos \zeta \operatorname{tang} P ; \cos(L' + \xi) = \frac{\operatorname{tang} \zeta \operatorname{sen} \xi}{\operatorname{tang} \varpi}$$

$$(\S 132) \dots \operatorname{tang} \xi = \operatorname{sen} \lambda' \operatorname{tang} \varpi ; \operatorname{sen}(H + \xi) = \frac{\cot \lambda' \operatorname{sen} \xi}{\operatorname{tang} P}$$

Nel tempo stesso che si calcola sopra queste regole la prima formola di ciascun esempio, si potrà aumentare P ovvero ϖ successivamente di uno e poi di due minuti primi, donde si ricaverà facilmente la variazione risultante nell'angolo H , o L' , o P' , e quindi se ne dedurrà A , che esprime il rapporto della variazione di P , o di ϖ a quella di H , o di L' , o di P' ; e dalla differenza di A si otterrà ancora il valore di B .

146. Per chi vorrà esercitarsi in questi calcoli accenneremo tutti gli elementi d'un dato triangolo sferoidico. Ritenendo pertanto le dimensioni dello sferoide terrestre sopra (§ 15) stabilite, suppongasi che il triangolo sferoidico venga formato dal meridiano di Cadice, dal meridiano di Pietroburgo, e dall'arco terrestre che misura la via brevissima fra queste due città, avremo

$$\lambda = 36^\circ 32' 1'' ; \lambda' = 36^\circ 27' 6'' , 2$$

$$\phi = 59 \ 56 \ 23 ; \phi' = 59 \ 51 \ 55 , 4$$

$$\varpi = 36 \ 35 \ 45$$

$$\zeta = 33 \ 17 \ 17 , 4$$

$$\theta = 61^{\circ} 33' 53'' , 5$$

$$P = 33 \quad 8 \quad 26 , 5 . \text{ Via brevissima } = 1886465^{\text{tese}} , 3$$

Onde immaginando che sieno dati tre di questi elementi, sarà facile il verificare colle date soluzioni i tre altri elementi.

147. Allorchè si suppone l' eccentricità eguale a zero, lo sferoide ellittico diventa una sfera, e non rimangono per la soluzione de' proposti problemi, che le formole indipendenti dall' eccentricità, cioè quelle stesse che servono alle soluzioni de' triangoli sferici. Per conseguenza la trigonometria sferica non è che un caso particolare della trigonometria sferoidica. Le tre equazioni fondamentali nel caso di $e=0$, sono (§§ 22, 27)

$$\text{sen } \theta = \frac{\cos \lambda}{\cos \phi} \text{sen } \zeta$$

$$P = v - v'$$

$$w = z - z'$$

la terza delle quali diventa superflua, poichè nel triangolo sferico non è necessario che uno degli angoli sia in un punto determinato, ovvero nel polo come nel triangolo sferoidico. Anzi siccome dalla seconda equazione si ricava (§ 72) la formola

$$\cos \zeta = \frac{\text{sen } \phi - \text{sen } \lambda \cos P}{\cos \lambda \text{sen } P}$$

la quale, chiamando i tre angoli d' un triangolo sferico A, B, C corrispondenti a $\zeta, 180^{\circ} - \theta, w$, ed i tre lati rispettivamente opposti a, b, c corrispondenti a $90^{\circ} - \phi, 90^{\circ} - \lambda, P$, si cangia in

$$T. II. \quad P. II.$$

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

questa sola formola ci può dare la prima

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a} \sin A \text{ e tutte le altre della trigonometria}$$

sferica, come ha elegantemente dimostrato il sommo geometra *Lagrange*.

Fig. 1

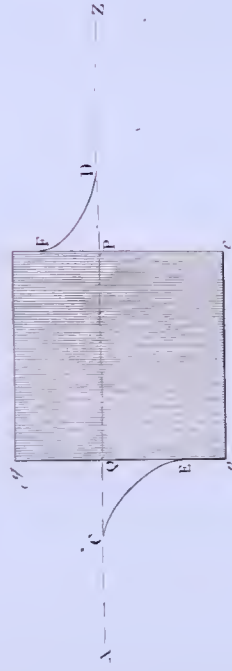


Fig. 2

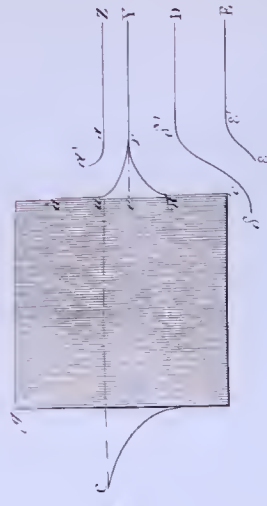


Fig. 11



Fig. 3

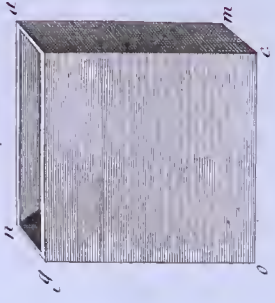


Fig. 4

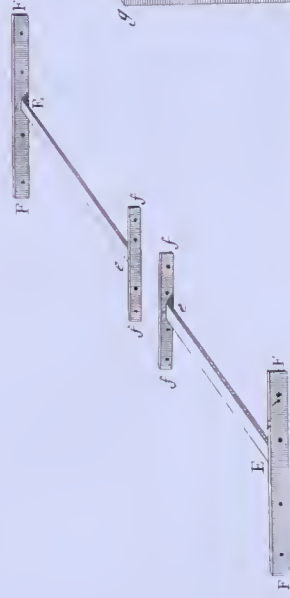


Fig. 5



Fig. 6

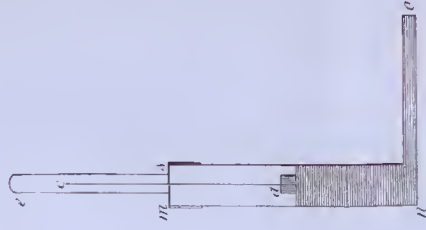


Fig. 7

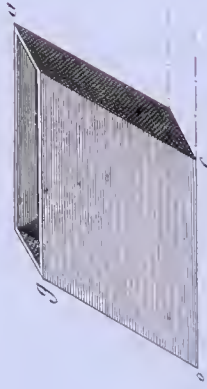


Fig. 8

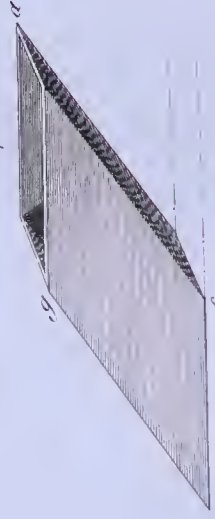


Fig. 9



Fig. 10



CONTINUAZIONE

*Delle osservazioni e sperienze sopra la teoria
della resistenza de' fluidi del sig. Juan*

DI GIUSEPPE AVANZINI

ricevuta il dì primo d'ottobre. 1803

33. **L**a teoria della resistenza de' fluidi del sig. Juan non si restringe alla sola ipotesi finora considerata (a) che il solido sia totalmente, e indefinitamente immerso nel fluido. Essa si estende anche al caso che il solido non sia tutto immerso, e che la porzione ch' esce dal fluido non sia minore dell' altezza, alla quale in tale circostanza deve il fluido innalzarsi davanti al solido. L' esame di questa seconda parte della teoria di Juan, tanto importante per l' applicazione che ne fece alla scienza del moto dei bastimenti, forma il soggetto delle seguenti osservazioni e sperienze. In esse noi faremo uso del metodo seguito nelle precedenti rivogliendole alla discussione tanto dei principj teo-

(a) Ist. Naz. Tom. 2. di Fis. e Mat. P. 1.

retici, quanto degli sperimenti ai quali l'illustre Geometra appoggia la sua teoria.

39. Egli incomincia dalla supposizione che il solido sia un parallelepipedo rettangolare che si muova orizzontalmente, e in direzione normale alle facce anteriore e posteriore, e con velocità o uguale, o minore della lunghezza del parallelepipedo medesimo. In questa ipotesi egli trova che chiamata u la velocità del parallelepipedo, b la lunghezza, ε l'altezza a cui trovasi immerso, la resistenza ad esso solido opposta dal fluido debba essere

$$\frac{m}{3} b (u \varepsilon \sqrt{\varepsilon} + \frac{u^4}{64^2} \dots \dots \dots (R)$$

40. Questa formola è dedotta immediatamente da due supposizioni; cioè che la pressione esercitata dal fluido contro la faccia anteriore sia

$$m b (\frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{u \varepsilon}{6} \sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{64} u^2 \varepsilon + \frac{u^4}{6.64^2}) \dots \dots (\tau), \text{ ed}$$

$$m b (\frac{1}{2} \varepsilon^2 - \frac{u \varepsilon}{6} \sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{64} u^2 \varepsilon - \frac{u^4}{6.64^2}) \dots \dots (\tau')$$

quella contro la faccia posteriore. Di fatto essendo la resistenza, siccome abbiamo altrove notato (§ 2), la differenza delle due sopradette pressioni, sottraendo la seconda (τ') dalla prima (τ) si ottiene appunto l'espressione $\dots (R)$. Noi ci faremo quindi ad esaminare i principii coi quali Juan dimostra le formole (τ), (τ').

41. Supposto gc (fig. 1^a) il profilo del parallelepipedo, XZ il livello del fluido, e perciò Qc la por-

zione immersa del parallelepipedo stesso, PF l'altezza dell'intumescenza del fluido, le ipotesi sulle quali è fondata la formola (τ) sono 1°. che la pressione contro un rettangololetto $bd\epsilon$ della faccia anteriore Pc sia

$$mbd\epsilon(\sqrt{\epsilon} + \frac{1}{8}u)^2, \text{ ovvero } mbd\epsilon(\sqrt{\epsilon} + \sqrt{h})^2$$

supposta h l'altezza dovuta alla velocità u . 2°. che il fluido s'innalzi di tutta la $PF = \frac{1}{64}u^2$; 3°. che la pressione contro un rettangololetto di PF di altezza $d\epsilon'$, e distante da F della quantità ϵ' sia

$$mbd\epsilon'(-\sqrt{\epsilon'} + \frac{1}{8}u)^2. \text{ Di fatto integrando la formola}$$

$mbd\epsilon(\sqrt{\epsilon} + \frac{1}{8}u)^2$ si ottiene per la pressione contro tutta la Pc

$$mb(\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{u\epsilon}{6}\sqrt{\epsilon} + \frac{\epsilon u^2}{64}) + C^{\text{te}}. \text{ La costante secondo Juan}$$

deve esser tale che, fatto $\epsilon = 0$, la pressione si riduca a quella esercitata dal fluido contro PF . Per ritrovarla egli passa all'integrazione della formola

$$mbd\epsilon'(-\sqrt{\epsilon'} + \frac{1}{8}u)^2 \text{ che ritrova}$$

$$mb(\frac{\epsilon'^2}{2} - \frac{xu}{6}\epsilon'\sqrt{\epsilon'} + \frac{1}{64}\epsilon'u^2), \text{ e sopra tutta la } PF,$$

$$mb(\frac{PF^2}{2} - \frac{1}{6}u \cdot PF\sqrt{PF} + \frac{1}{64}PFu^2); \text{ ma per la 2}^\circ,$$

ipotesi $P F = \frac{1}{64} u^2$, dunque sostituendo si ottiene

$\frac{m b u^2}{6 \cdot 64^2}$ per la pressione contro $P F$; e perciò la pressione contro tutta la $c F$ sarà

$m b \left(\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{u \varepsilon \sqrt{\varepsilon}}{6} + \frac{\varepsilon u^2}{64} + \frac{u^4}{6 \cdot 64^2} \right)$ che è appunto la formola (τ).

42. Quanto alla prima ipotesi, cioè che la pressione contro un rettangolo $b d \varepsilon$ sia

$m b d \varepsilon \left(\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{8} u \right)^2$ si osserverà ch'essa ne contiene

altre due. 1.^a che il fluido non abbia altra velocità, se non quella che nasce dalla pressione della colonna sovraincombente, e la velocità u del parallelepipedo.

2.^a che la pressione sia uguale al quadrato di $\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{8} u$.

Ora vedremo che tali ipotesi non sono conformi ne alla ragione, ne all'esperienza.

Per ciò che spetta alla prima, considerando attentamente il moto che concepisce il fluido innanzi al parallelepipedo $g c$ (fig. 2.^a) si osserva 1.^o che un filo fluido, per esempio $Y \nu$, a qualche distanza dalla faccia $a c$, come in ν , si divide nei due fili $\nu a a'$, $\nu \pi' c$, lasciando lo spazio $a \nu \pi'$ ripieno di fluido stagnante. 2.^o che gli altri fili si piegano per $a a'$ ec. $\delta' \delta$ ec. $\varepsilon' \varepsilon$ ec. Donde apparisce che il solo fluido davanti alla $a \tau'$ avrà le due velocità sopradette, ma che il fluido davanti

alle porzioni $a a'$, πc oltre quelle velocità virtuali ne avrà una di reale e parallela alla faccia $a c$.

Riguardo alla 2^a ipotesi, dai ragionamenti del § 31 rimane evidentemente dimostrato che la pressione contro un differenzio-differenziale sì della porzione $a \pi'$, come della $a a'$, e $\pi' c$ non deve già essere espressa indistintamente come vuole Juan da una funzione delle sole ε, u , e che questa funzione non può essere il quadrato della somma di $\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{8} u$. Nulladimeno a togliere anche il sospetto, che malgrado ciò potesse pure essere almeno prossimamente vera la formola di Juan perchè essa avesse pochissimo a differire dal valore delle sopradette funzioni qualunque sieno, ho voluto consultar gli sperimenti. Prima però di esporne i risultati, e farne il confronto con la formola, fa d' uopo conoscere gli artifizj coi quali s' istituirono.

43. *gc* fig. 3^a. è una cassetta rettangolare di legno forte e bene stagionato, e si fortemente connessa che, rimanendo nel fluido non abbia a soffrire sensibile alterazione nella figura. $E e, E e$, (fig. 4^a.) sono due pezzi di ottone terminanti in due lamine rettangolari $F F, f f, F F, f f$, e normali ad essi pezzi $E e, E e$. La cassetta è stretta fra le due lamine $f f, f f$, col mezzo di quattro viti, come lo dimostra la fig. 5^a. Le altre $F F, F F$ sono unite ai due parallelepipedi $G H, G H$ (fig. 2.^a tavola 2. mem.^a 1.^a *Nuove ricerche ec.*), scorrevoli tra le due liste $f c, f' c'$, (fig. 1.^a.) immerse a tale profondità nell'acqua da lasciare fuor d'essa quella porzione della cassetta che più piacesse.

Mediante i due pesi motori P, P (fig. 1.^a come

sopra) moventi i parallelepipedi $\bar{G}H, GH$, lungo le sopradette liste si fece correre la cassetta per l'acqua del canale descritto al § 10. e seguenti della mentovata memoria.

44. A rendermi certo che la cassetta si avesse orizzontalmente ebbi l'avvertenza di assicurarmi ben bene che le liste, siccome pure la faccia superiore ga della cassetta medesima (fig. 3^a.) fossero orizzontali, ossia parallele alla superficie dell'acqua perfettamente tranquilla. Essendo poi le lamine FF, FF , normali ad eE, eE , (fig. 4^a.) ed eE, eE a squadra colle facce laterali gc, nm (fig. 3^a.) è fuor di dubbio che anche le facce ac, no , anteriore e posteriore, dovranno essere normali alla direzione del loro moto.

45. A muovere la cassetta con velocità uniformi e differenti tra loro, feci uso del metodo descritto ai §§ 14 ec. della citata memoria.

46. Assicurato che in tal modo il parallelepipedo moveasi come lo richiedeva il caso considerato da Juan, non mi rimaneva se non di rinvenire l'artificio per misurare le pressioni dell'acqua contro i differenzio-differenziali, ossia porzioni piccolissime della faccia anteriore ac . A quest'uopo riputai convenientissimo l'ordigno già accennato (§ 5) del sig. cav. Dubuat; facendo nella faccia anteriore del parallelepipedo un foro lungo la linea che la dimezzava verticalmente, del diametro di due linee, ed applicando ad esso un tubo ricurvo mno (fig. 5^a.) aperto in tutte e due l'estremità. Scorgesi chiaramente, che se la cassetta tuffata nell'acqua tranquilla fosse ferma, l'acqua salirebbe nel braccio mn fino al proprio livello, ma che movendosi la

cassetta, l'acqua contenuta nell'altro braccio $n o$ urterà continuamente l'acqua esteriore, o ciò che torna allo stesso, l'acqua esteriore preinerà in o l'acqua del braccio $o n$, e farà salire quella del braccio $n m$ ad una tale altezza sopra il detto livello, che il peso della colonna d'acqua di quest' altezza, e di base uguale all'area del foro o , equivalga all'indicata pressione dell'acqua esteriore contro o .

47. Posto ciò è manifesto che per trovare le pressioni conveniva misurare esattamente l'altezza a cui doveva salire l'acqua nel tubo. A quest' oggetto mi servii di un piccolo cilindro a (fig. 6^a.) di sughero galleggiante sull'acqua, e portante un fusto ac di paglia, il quale passando per un foro aperto in un coperchio, che chiudeva l'estremità m del tubo, dovesse ascendendo l'acqua salire verticalmente senza inclinarsi or verso una parte, or verso l'altra del tubo. Al coperchio si unì una laminetta es divisa in quarti di linea.

Giunto il parallelepipedo al moto uniforme si notava l'altezza a cui era salita l'estremità c della paglia, indi fermavasi la cassetta, e riacquistata dall'acqua la sua perfetta quiete notavasi lo spazio per cui la stessa estremità c era discesa. Niuno potrà certamente dubitare che un tale spazio non sia precisamente l'altezza alla quale il fluido s'innalza sopra il proprio livello a cagione, come si disse, della pressione del fluido esteriore.

48. E perchè non rimanga timore alcuno su l'esattezza di un tale metodo gioverà rammentare 1^o. che pervenuta la cassetta al moto uniforme, il galleggiante rimaneva costantemente all'altezza cui era salito, e

ciò in virtù del moto fisicamente uniforme procurato al solido mediante gli artifizj descritti al § 14. mem. 1.^a. *Nuove ricerche*, ec., e dello spazio che percorreva, fisicamente anch'esso parallelo alla superficie del livello del fluido. 2.^o. che lo spazio percorso dalla cassetta uniformemente, rimanendo il galleggiante continuamente allo stesso sito, era di 20 e più piedi. 3.^o. che aumentando o diminuendo alcun poco la velocità del solido, si aumentava, o diminuiva in proporzione anche l'altezza a cui perveniva il galleggiante; il che mostra ch'esso non incontrava nel salire e scendere ostacolo alcuno. 4.^o. che per assicurarmi della precisione nella misura dello spazio percorso dal galleggiante, moltiplicai ciascuna sperienza dieci e più volte.

49. Dal fin qui detto non apparisce evidentemente che se la formola $m d b \cdot d \cdot (\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{h})^2$ della pressione rinvenuta da Juan è la vera, essa dovrà trovarsi uguale alla pressione dello sperimento, che è quanto dire, che $(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{h})^2$ dovrà essere uguale alla somma della distanza ε del foro o dal livello del fluido, e dell'altezza del galleggiante sopra il livello del fluido esteriore? Le seguenti tavole presentano il confronto di tali pressioni e le loro differenze.

I

Immersione 12 poll.	Velocità u $\frac{21}{22}$ piedi in 1"	Altezza h dovuta alla velocità u , lin. 2 , 17	
<i>Altezze</i> ε	<i>Pressioni dello sperimento</i>	<i>Pressioni della formola di Juan</i>	<i>Differenze</i>
Linee	Linee	Linee	Linee
132	134 , 80	168 , 04	+ 33 , 24
120	123 , 33	154 , 57	+ 31 , 24
108	111 , 50	140 , 57	+ 29 , 07
96	99 , 50	127 , 17	+ 27 , 67
84	87 , 50	113 , 17	+ 25 , 67
72	75 , 50	99 , 23	+ 23 , 73
60	63 , 50	84 , 97	+ 21 , 47
48	51 , 60	70 , 57	+ 18 , 9-
36	39 , 75	55 , 77	+ 16 , 02
24	27 , 80	40 , 57	+ 12 , 77

II

Immersione 12 poll.	Velocità ^{3/4} piedi in 1"	Altezza dovuta alla velocità. 4 lin. 40	
<i>Altezze</i> ε	<i>Pressioni sperimentali</i>	<i>Pressioni della formola di Juan</i>	<i>Differenze</i>
Linee	Linee	Linee	Linee
132	135 , 25	184 , 40	+ 47 , 15
120	126 , 00	170 , 40	+ 44 , 40
108	114 , 25	156 , 00	+ 41 , 75
96	102 , 25	141 , 60	+ 39 , 35
84	90 , 25	126 , 80	+ 36 , 55
72	78 , 25	112 , 00	+ 33 , 75
60	66 , 25	96 , 90	+ 30 , 65
48	54 , 33	81 , 60	+ 27 , 27
36	42 , 40	65 , 60	+ 23 , 20
24	30 , 50	49 , 00	+ 18 , 50

III

Immersione 12 poll.	Velocità $\frac{3}{2}$ piedi in 1"	Altezza dovuta alla velocità. lin. 5 , 36	
<i>Altezze</i> ε	<i>Pressioni dello sperimento</i>	<i>Pressioni della formola di Juan</i>	<i>Differenze</i>
Linee	Linee	Linee	Linee
132	138 , 00	190 , 96	+ 52 , 96
120	128 , 00	175 , 05	+ 48 , 05
108	116 , 25	161 , 12	+ 44 , 87
96	104 , 33	146 , 76	+ 42 , 43
84	92 , 33	131 , 76	+ 39 , 43
72	80 , 33	116 , 56	+ 36 , 23
60	68 , 33	101 , 36	+ 33 , 03
48	56 , 33	85 , 36	+ 29 , 03
36	44 , 50	68 , 96	+ 24 , 46
24	32 , 60	52 , 20	+ 19 , 60

Una sì grande disparità tra le due pressioni sopra ognuna delle dieci porzioncelle della faccia anteriore del parallelepipedo, deve al certo convincerci che la formola di Juan è ben lontana dall'esprimere la funzione che rappresenti le vere pressioni del fluido.

5o. Passiamo ora all'esame della seconda ipotesi; cioè che l'altezza $P F$ (fig. 1^a.) del fluido sia eguale ad $\frac{1}{64} u^2$.

La pressione, dice il sig. Juan, sopra un rettangololetto $b d \varepsilon$ preso alla distanza ε sotto il livello $X Z$ del fluido è

$$m b d \varepsilon \left(\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{8} u \right)^2$$

Nel colmo F la pressione dovrà esser zero, e perciò

$$m b d \varepsilon \left(\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{8} u \right)^2 = 0$$

quindi $\sqrt{\varepsilon} = -\frac{1}{8} u$ espressione, soggiunge egli, nella

quale il segno negativo indica che il punto al quale corrisponde il valore di ε è al di sopra di P origine di ε .

Quadrando l'equazione

$$\sqrt{\varepsilon} = -\frac{1}{8} u, \text{ si ottiene } \varepsilon = \frac{1}{64} u^2 \text{ altezza di } P F. (a)$$

Sopra tale ragionamento si osserverà 1°. che la pressione sopra un rettangololetto $b d \varepsilon$ della superficie immer-

(a) § 594 dell'opera citata.

sa è ben differente (§§ 42, 49) da $m b d \epsilon (\sqrt{\epsilon} + \frac{1}{8} u)^2$.

2°. che se la pressione sopra il detto rettangololetto fosse anche quale viene supposta da Juan, da ciò non seguirebbe che nel colmo del fluido dovesse essere

$\sqrt{\epsilon} = -\frac{1}{8} u$. Per dimostrarlo basterà che ci ricordiamo

che, secondo Juan, $\sqrt{\epsilon}$ esprime la radice dell' altezza del fluido sopra il rettangololetto $b d \epsilon$, ossia la velocità con la quale il fluido che è al contatto del suddetto rettangololetto penetrerebbe a traverso di esso a causa della pressione del fluido che gli sovrasta. Ora al colmo del fluido essendo zero quest'altezza ϵ , ed ivi il fluido essendo pure urtato, o premuto dal parallelepipedo con velocità u , che è quanto dire, che dove è zero la ϵ, u continua a ritenere un valore finito, non si potrà giammai supporre che nel colmo del fluido

possa essere $\sqrt{\epsilon} = -\frac{1}{8} u$, poichè allora una quantità

picciolissima, o zero dovrebbe essere uguale ad una quantità finita. Ma si obbietterà forse da taluno essere

pure verissimo che supposta $m b d : (\sqrt{\epsilon} + \frac{1}{8} u)^2$ la pres-

sione sopra un rettangololetto della parte immersa $P c$, la qual pressione nel colmo debba essere zero, a renderla tale sia di necessità che $\sqrt{\epsilon}$ divenga uguale

a $-\frac{1}{8} u$.

La risposta è facilissima. Secondo i principj di Juan nell'equazione $\sqrt{\epsilon} = -\frac{1}{8} u$ il segno $-$ deve significa-

re soltanto, che a rendere zero la pressione

$m b d \epsilon (\sqrt{\epsilon} + \frac{1}{8} u)^2$ conviene che le due velocità, cioè quella dovuta alla pressione della colonna dell'altezza ϵ del fluido, e l'altra $\frac{1}{8} u$, in luogo di avere direzioni opposte cospirino entrambe ad uno stesso scopo, ed una delle due sia uguale all'altra. In fatti egli è indubitato che allora la velocità $\sqrt{\epsilon} + \frac{1}{8} u$ di urto diverrebbe $\sqrt{\epsilon} - \frac{1}{8} u$, ed essendo, per ipotesi, $\sqrt{\epsilon} = \frac{1}{8} u$

la pressione sarebbe zero. Ora una tale cospirazione ed uguaglianza si verifica bensì, come vedremo, dietro al parallelepipedo, ma non giammai nel fluido innanzi ad esso. 3°. finalmente che supposto pure che nel colmo del fluido sia, come vuole Juan, $\sqrt{\epsilon} = -\frac{1}{8} u$,

il segno $-$ annesso alla $\frac{1}{8} u$ ben lontano dal dover in-

dicare che il punto F sia sopra P , dimostra all'opposto che esso punto dovrebbe essere di sotto. In fat-

ti perchè $\sqrt{\epsilon} = -\frac{1}{8} u$ potesse provare che il valore di

ϵ deve essere negativo cioè sopra P , non è egli evidente che dovrebbe essere negativo non già il valore di $\sqrt{\epsilon}$, ma bensì quello di ϵ ? Ora lo stesso Juan trova $\epsilon = \frac{1}{64} u^2$, vale a dire ϵ positivo; dunque essendo-

si preso ε positivo discendendo da P , $\sqrt{\varepsilon} = -\frac{1}{8}u$ mostrerebbe che ε devesi prendere sotto non sopra P .

Queste riflessioni dimostrano chiaramente che dal ragionamento di Juan non può dedursi nè che il fluido debba innalzarsi, come gli sembra di poter inferire dalla sua formola, nè che debba innalzarsi all'altezza $= \frac{1}{64} u^2$.

51. La verità di questa 2.^a conclusione è pure confermata irrefragabilmente dalla sperienza. I sig.^{ri} *Alembert*, *Condorcet*, e *Bossut* ne' loro classici sperimenti sopra la resistenza de' fluidi osservarono che l'altezza, a cui sali l'acqua davanti ai parallelepipedi che fecero muovere, parte immersi, e parte fuori del fluido, cresceva aumentando la loro velocità, e che in parità di circostanze si aumentava pure crescendo la larghezza; e per l'opposto si diminuiva aumentando l'immersione. In breve, che l'altezza dell'intuinescenza è una funzione non solo della velocità, ma anche dell'immersione e larghezza del parallelepipedo; quando, se fosse vero che l'altezza suddetta dovesse essere espressa da $\frac{1}{64} u^2$, come crede Juan, sarebbe una funzione della sola velocità.

52. Che una tale altezza non sia uguale ad $\frac{1}{64} u^2$ ce lo dimostrano direttamente i sperimenti instituiti dai sopranimentovati *Matematici* sopra un parallelepipedo di 6 piedi e un pollice di lunghezza, e 19 pollici, ed 3 linee di larghezza, e riferiti ai §§ 891, 892, 893 dell'I-

T. II. P. II. 10

drodinamica di Bossut. Nelle tavole seguenti espongo il confronto delle altezze osservate, e di quelle che darebbe la formola di Juan.

I

Immersione 7 poll. 10 lin.			
<i>Mezzi secondi spesi a percorrere 50 piedi</i>	<i>Altezze osservate del tabbro</i>	<i>Altezze secondo Juan</i>	<i>Differenze</i>
	Linee	Linee	Linee
41 , 75	24 $\frac{1}{2}$	13	— 11 $\frac{1}{2}$
37 , 80	32 $\frac{1}{2}$	16	— 16 $\frac{1}{2}$
34 , 75	38	19	— 19
32 , 50	46	22	— 24
29 , 90	50	26	— 24

I I

Immersione 12 poll. 5 $\frac{1}{2}$ lin.			
<i>Mezzi secondi spesi a percorrere 50 piedi</i>	<i>Altezze osservate del labbro</i>	<i>Altezze secondo Juan</i>	<i>Differenze</i>
	Linee	Linee	Linee
52 , 00	15	9	— 6
46 , 05	18	11	— 7
42 , 07	20 $\frac{1}{2}$	13	— 7 $\frac{1}{2}$
37 , 25	26	16	— 10
35 , 18	32 $\frac{1}{2}$	19	— 13 $\frac{1}{2}$

III

Immersione 15 poll. 10 lin.			
<i>Mezzi secondi spesi a percorrere 50 piedi</i>	<i>Altezze osservate del labbro</i>	<i>Altezze secondo Juan</i>	<i>Differenze</i>
	Linee	Linee	Linee
50 , 75	15	9	— 6
46 , 50	18	11	— 7
41 , 00	24	14	— 10
36 , 50	33	18	— 15
33 , 69	39	21	— 18

53. Una legittima e immediata conseguenza della erroneità dell'altezza a cui secondo Juan deve il fluido elevarsi innanzi al parallelepipedo troveremo la 3^a ipotesi, cioè che la pressione che il fluido innalzato esercita contro un rettangololetto $b d \epsilon'$ della PF , (fig. 1^a)

sia (§ 41) $m b d \epsilon' (-\sqrt{\epsilon'} + \frac{1}{8} u)^2$. Dalla supposizio-

ne che nell'equazione $\sqrt{\epsilon} = -\frac{1}{8} u$ (§ 50), il segno —

indichi che il punto al quale corrisponde il valore di ϵ sia negativo, cioè sopra P , il sig. Juan deduce (a) per corollario, che per determinare le pressioni del fluido innalzato non si avrà che a rendere negativa la $\sqrt{\epsilon}$

(a) § 595 dell'opera citata.

nella formola $m b d \varepsilon (\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{8} u)^2$ della pressione contro un rettangolo $b d \varepsilon$ della parte immersa Pc ; e che quindi la pressione contro un rettangolo $b d \varepsilon'$ della PF sarà $m b d \varepsilon (-\sqrt{\varepsilon'} + \frac{1}{8} u)^2$. Ciò premesso, non essendo giusta (§ 42, 49) la formola $m b d \varepsilon (\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{8} u)^2$, da cui Juan fa nascere immediatamente la $\sqrt{\varepsilon} = -\frac{1}{8} u$, e nè tampoco essendo vero (§ 50) che il segno $-$ abbia il significato da esso supposto, si dovrà necessariamente conchiudere che neppur vera, nè giusta potrà essere l'espressione $m b d \varepsilon' (-\sqrt{\varepsilon'} + \frac{1}{8} u)^2$.

54. Con tutto ciò riputai importantissimo il consultare anche sopra di ciò l'esperienza investigando con gli artifizj dei §§ 43....48 le pressioni sopra cinque porzioncelle della parte PF .

La seguente tavola presenta i risultati, ed il loro confronto con quelli della formola

$$m d b d \varepsilon' (-\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{8} u)^2.$$

Immersione 12 poll.	Velocità 8 piedi in 4"	Altezza dovuta alla velocità 9 lin. 54	
Altezza <i>PF</i> dell' Intumescenza 15 linee			
<i>Altezze — ε</i>	<i>Pressioni dello sperimento</i>	<i>Pressioni della formola di Juan</i>	<i>Differenze</i>
Linee	Linee	Linee	Linee
1 , 50	12 , 33	3 , 60	— 3 , 73
2 , 50	9 , 83	2 , 28	— 7 , 55
3 , 50	8 , 33	1 , 48	— 6 , 85
7 , 50	4 , 33	1 , 04	— 3 , 29
11 , 50	1 , 50	0 , 10	— 0 , 40

Da questa tavola si scorge chiaramente che l'esperienza concorda perfettamente nel dimostrare che anche la formola per le pressioni contro PF è egualmente erronea della formola delle pressioni contro Pc .

55. Passando poi all'esame della formola (τ') (§ 40) per la pressione contro la parte posteriore Qo (fig. 1^a) rilletteremo prima di tutto che le ipotesi, dalle quali essa è dedotta sono: 1°. che la pressione contro un rettangolo $mbd\epsilon$ della oQ distante dal livello Q di

ϵ sia $mbd\epsilon (\sqrt{\epsilon} - \frac{1}{3}u)^2$: 2°. che il fluido si abbassi

di tutta la $Q E = \frac{1}{64} u^2$. E in fatti integrando si avrà
 $m b \left(\frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{1}{6} u \varepsilon \sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{64} \varepsilon u^2 \right) + C^{te}$.

La costante deve esser tale che fatto $\varepsilon = E Q$ che, come si disse, secondo Juan è $= \frac{1}{64} u^2$, la pressione divenga zero. Perciò supposta nell'equazione precedente $\varepsilon = \frac{1}{64} u^2$ essa diventa $\frac{m b \cdot u^4}{6 \cdot 64^3}$; dunque la costante $= - \frac{m b \cdot u^4}{6 \cdot 64^3}$ e quindi la pressione sopra la $o E$
 $= m b \left(\frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{1}{6} u \varepsilon \sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{64} \varepsilon u^2 - \frac{1}{6 \cdot 64} u^4 \right)$, conforme perfettamente alla formula (π').

56. Per ciò che riguarda la 1^a ipotesi si considererà che la pressione contro il rettangololetto $b d \varepsilon$ non potrà certamente essere misurata da $m b d \varepsilon \left(\sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{8} u \right)^2$

a meno che non fosse vero 1°. che dietro al parallelepipedo il fluido non avesse altra velocità se non quella di tendenza contro la faccia posteriore cagionata dalla pressione del fluido sopraincombente, e che in oltre la funzione esprimente la pressione mentovata

avesse ad essere il quadrato di $\sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{8} u$ piuttosto che

qualche altra funzione. Ora ponendo attenzione al moto che concepisce il fluido dietro al parallelepipedo si osserva ch'esso è ben differente dal moto immaginato da Juan; conchiuderemo quindi che ben differente dalla vera dovrà essere anche la formola ch'egli ne porge della pressione.

57. Intorno a questa importantissima conseguenza veggiamo ora cosa ne dica lo sperimento. Posto il sifone in tanti forami aperti nella faccia posteriore della cassetta gc , (fig. 5^a), lungo la linea che dimezzava la faccia stessa verticalmente, e mossa la cassetta come negli sperimenti del § 43, si trovò che il galleggiante ac (fig. 6^a), in luogo di salire discendeva rimanendo pure costantemente senza oscillare alla stessa altezza in tutto il tempo in cui la cassetta percorreva uniformemente i 20 piedi. Applicando a questo caso il ragionamento del § 46, si raccoglierà che la pressione contro una porzioncella della faccia posteriore della cassetta uguale a quella dell'area o del sifone deve essere misurata dal peso d'una colonna di fluido che ha per base l'area sopraddetta, e per altezza l'altezza a cui si sostiene il fluido nel braccio nm . Misurata con l'artificio del § 47 una tale altezza si ebbero per le pressioni contro dieci porzioncelle della faccia posteriore i valori espressi nelle tavole seguenti, le quali offrono pure i valori della formola di Juan.

I

Immersione 12 poll.	Velocità $\frac{21}{22}$ piedi in 1"	Altezza dovuta alla velocità. 2 lin. 17	
<i>Altezze</i> ε	<i>Pressioni dello sperimento</i>	<i>Pressioni della formula di Juan</i>	<i>Differenze</i>
Linee	Linee	Linee	Linee
132	131 , 90	100 , 40	— 31 , 50
120	119 , 84	89 , 93	— 29 , 91
108	107 , 84	79 , 57	— 28 , 27
96	95 , 84	69 , 17	— 26 , 67
84	83 , 84	58 , 17	— 25 , 67
72	71 , 84	49 , 17	— 22 , 67
60	59 , 86	39 , 37	— 20 , 49
48	47 , 88	29 , 77	— 18 , 11
36	35 , 90	20 , 57	— 15 , 33
24	23 , 95	11 , 77	— 12 , 18

I I

Immersione 12 poll.	Velocità $\frac{4}{3}$ piedi in 1"	Altezza dovuta alla velocità 4 lin., 40	
<i>Altezza</i> ε	<i>Pressioni dello sperimento</i>	<i>Pressioni della formola di Juan</i>	<i>Differenze</i>
Linee	Linee	Linee	Linee
132	131 , 10	88 , 24	— 42 , 86
120	118 , 80	78 , 40	— 40 , 40
108	106 , 80	68 , 80	— 38 , 00
96	94 , 80	59 , 20	— 35 , 60
84	82 , 50	50 , 00	— 32 , 50
72	70 , 50	40 , 80	— 29 , 70
60	59 , 00	32 , 00	— 27 , 00
48	47 , 10	23 , 20	— 23 , 90
36	35 , 50	15 , 20	— 20 , 30
24	23 , 60	7 , 80	— 15 , 80

T. II. P. II.

III

Immersione 12 poll.	Velocità $\frac{3}{4}$ piedi in 1"	Altezza dovuta alla velocità. 5 lin. 36	
<i>Altezza e</i>	<i>Pressione dello sperimento</i>	<i>Pressione della formula di Juan</i>	<i>Differenze</i>
Linee	Linee	Linee	Linee
132	131, 20	84, 21	— 46, 99
120	119, 10	74, 16	— 44, 94
108	107, 10	65, 56	— 41, 54
96	95, 10	55, 96	— 39, 14
84	82, 90	46, 96	— 35, 94
72	70, 90	38, 06	— 32, 84
60	59, 00	29, 50	— 29, 50
48	47, 00	21, 36	— 25, 64
36	35, 10	13, 50	— 21, 60
24	23, 60	6, 70	— 16, 90

Facendo considerazione alle differenze tanto sensibili tra le pressioni dello sperimento, e della formula di Juan, dovrà ognuno rimanere convinto ch' essa è ugualmente inesatta e inammissibile come quella delle pressioni anteriori.

58. Niente meno viziosa ritroveremo la 'seconda ipotesi, cioè che il fluido si abbassi di tutta la

$$Q E = \frac{1}{64} u^2 \text{ (fig. 1'.)}$$

Supposto vero che la pressione contro un rettangolo $b d \epsilon$ di $o E$ sia $m b d \epsilon (\sqrt{\epsilon} - \frac{1}{8} u)^2$ è indubitato che il fluido dovrebbe abbassarsi di tutta l'altezza

$$Q E = \frac{1}{64} u^2, \text{ o più esattamente che il fluido dovrebbe}$$

rimanere staccato dalla faccia posteriore di tutto il

tratto $Q E = \frac{1}{64} \cdot u^2$. Imperciocchè in vigore della for-

mula medesima, e del significato di $\sqrt{\epsilon}$ che esprime la velocità dovuta all'altezza ϵ , è manifesto dovervi essere un punto E talmente distante dal livello Q , che la velocità dovuta alla pressione della colonna dell'altezza

$Q E$ sia $= \frac{1}{8} u$. Ma non potendosi assolutamente am-

mettere (§ 57) che la pressione contro il sopradetto rettangolo sia quale la crede Juan, non potremo neppure esser sicuri che sia $Q E = \frac{1}{64} u^2$.

59. A persuadersene anche col fatto si esamini nella seguente tavola il confronto tra l'abbassamento del fluido rinvenuto con esatti e ripetuti sperimenti sopra la cassetta (fig. 5^a.) e l'abbassamento richiesto dalla formula di Juan.

Immissione della cassetta 12 poll.			
<i>Velocità ossia spazj percorsi in 1"</i>	<i>Abbassamenti corrispondenti</i>	<i>Abbassamenti secondo la formula di Juan</i>	<i>Differenze</i>
Piedi	Linee	Linee	Linee
2	4 , 37	9 , 54	+ 5 , 17
1 $\frac{1}{2}$	3 , 50	5 , 36	+ 1 , 86

60. Se le pressioni elementari contro le due facce anteriore e posteriore del parallelepipedo di tanto si scostano dalle vere, come tutto il fin qui detto concorre a porlo fuor d'ogni dubbio, anche le pressioni totali (τ), (τ') che il sig. Juan ne dedusse dovranno indubitatamente tenersi per troppo inesatte, e perciò imperfetta, e pericolosa anche la formula (R) della resistenza (§ 39).

61. Ma potrebbe a taluno insorgere il dubbio che gli errori delle due formule ($-$), (τ') potessero, sottraendo l'una dall'altra per ottenere (§ 40) la resistenza, compensarsi a vicenda, e quindi malgrado la loro inesattezza dovessero somministrare un valor ve-

ro della resistenza medesima. Se così fosse è indubitato che la formula (R) dovrebbe per la resistenza incontrata da un parallelepipedo moventesi per l'acqua tranquilla porgere un valore del tutto, o prossimamente conforme a quello della sperienza. Veggiamo adunque se si trovi veramente una tale corrispondenza.

62. Senza istituire a quest'oggetto nuovi sperimenti mi si vorrà al certo accordare che a quest'uopo esser debbano valevolissimi quelli degli altrove menzionati Matematici francesi, e gli altri che due anni dopo intraprese il sig. Bossut, e riferiti ai §§ 991, 1012 della sua idrodinamica. Ecco il confronto delle resistenze rinvenute dai sopra mentovati Geometri con

quelle che porge la formula $\frac{m}{3} \frac{b}{\epsilon} (u \epsilon \sqrt{\epsilon} + \frac{1}{64} u^4)$.

Un'occhiata sopra le enormi loro differenze basterà, io spero, a levare fin anche ai più scrupolosi, e ai più aderenti alla teoria di Juan qualunque lusinga ch'essa dovesse pure per le addotte ragioni ritenersi almeno per probabilmente vera.

I

Lunghezza del parallelepipedo 6 piedi 1 poll. Larghezza 18 poll. 8 lin. Immersione 7 poll. 10 lin.			
<i>Mezzi secondi spesi a percorrere 50 piedi</i>	<i>Resistenze dello sperimento</i>	<i>Resistenze della formola di Juan</i>	<i>Differenze</i>
	Marchi	Marchi	Marchi
41 , 75	16	88	+ 72
37 , 80	20	96	+ 76
34 , 75	24	104	+ 80
32 , 50	30	111	+ 81
29 , 90	36	120	+ 84

II

Lunghezza e larghezza del parallelepipedo come sopra Immersione 12 poll. 5 $\frac{1}{2}$ lin.			
<i>Mezzi secondi spesi a percorrere 50 piedi</i>	<i>Resistenze dello sperimento</i>	<i>Resistenze della formola di Juan</i>	<i>Differenze</i>
	Marchi	Marchi	Marchi
52 , 00	16	135 $\frac{1}{2}$	+ 119 $\frac{1}{2}$
46 , 05	20	153 $\frac{1}{3}$	+ 133 $\frac{1}{3}$
42 , 07	24	168	+ 144
37 , 25	30	189 $\frac{1}{2}$	+ 159 $\frac{1}{2}$
35 , 18	35	200 $\frac{1}{3}$	+ 165 $\frac{1}{3}$

III

Lunghezza e larghezza del parallelepipedo
come sopra
Immersione 15 poll. 10 lin.

<i>Mezzi secondi spesi a percorrere 50 piedi</i>	<i>Resistenze dello sperimento</i>	<i>Resistenze della formola di Juan</i>	<i>Differenze</i>
	Marchi	Marchi	Marchi
50 , 75	20	201	+ 181
46 , 50	24	220	+ 196
41 , 00	32	249 $\frac{1}{3}$	+ 217 $\frac{1}{3}$
36 , 50	40	280 $\frac{1}{5}$	+ 240 $\frac{1}{5}$
33 , 69	48	303 $\frac{1}{3}$	+ 255 $\frac{1}{3}$

IV

Lunghezza del parallelepipedo P^i 4
Larghezza 2 piedi
Immersione 2 piedi

<i>Secondi spesi a percorrere 96 piedi</i>	<i>Resistenze dello sperimento</i>	<i>Resistenze della formola di Juan</i>	<i>Differenze</i>
	Libbre	Libbre	Libbre
78 , 08	60 + 1,8	149 $\frac{2}{3}$	+ 88
57 , 51	110 + 2,5	202 $\frac{1}{5}$	+ 90 $\frac{1}{5}$
47 , 44	160 + 2,5	245 $\frac{1}{2}$	+ 83 $\frac{1}{2}$
41 , 49	210 + 2,5	276	+ 64
37 , 32	260 + 2,5	314 $\frac{1}{4}$	+ 52

V

Lunghezza del parallelepipedo 2 piedi Larghezza 4 piedi Immersione 2 piedi			
<i>Secondi spesi a percorrere 72 piedi</i>	<i>Resistenza dello sperimento</i>	<i>Resistenza della formula di Juan</i>	<i>Differenza</i>
	Libbre	Libbre	Libbre
72 , 00	110 + 2 , 5	241	131

63. Dalla supposizione delle facce anteriore e posteriore del parallelepipedo perpendicolari alla sua base passando a considerarle inclinate alla base medesima d' un angolo qualunque θ vuole il sig. Juan (*a*), che la resistenza che incontrerebbe allora il parallelepipedo immerso nel fluido fino all' altezza ε , e moventesi con la velocità u orizzontalmente, e in direzione parallela alla base ed alle facce laterali, sia espressa dalla formola

$$\frac{1}{3} m b (u \sin \theta \cdot \varepsilon \sqrt{\varepsilon} + \frac{u^4 \sin^4 \theta}{64^a}) \dots (R')$$

Sebbene non sia difficile a comprendere che non reggendo in conto alcuno la formola ch' egli adotta nel primo caso, non debba reggere neppur quella del secondo, traendola egli immediatamente dai principj fon-

(a) § 640 Examen Maritime ec.

damentali della prima, tuttavia non sarà inutile l'aggiungere anche sopra tal formola alcune osservazioni, e sperienze.

64. La formula (R') come la (R) è pure fondata sopra cinque supposizioni

La 1^a. è che la pressione sopra un differenzio-differenziale $db \cdot d\epsilon$ della faccia immersa anteriore sia

$$m db \cdot d\epsilon (\sqrt{\epsilon} + \frac{1}{8} u \sin \theta)^2.$$

La 2^a. che il fluido s'inalzi davanti al parallelepipedo

$$\text{della quantità } s = \frac{1}{64} u^2 \sin^2 \theta.$$

La 3^a. che la pressione sopra un differenzio-differenziale della faccia colpita dal fluido che s'inalza sia

$$m db \cdot d\epsilon (-\sqrt{\epsilon} + \frac{1}{8} u \sin \theta)^2.$$

La 4^a. che la pressione sopra un differenzio-differenziale della faccia posteriore sia

$$m db \cdot d\epsilon (\sqrt{\epsilon} - \frac{1}{8} u \sin \theta)^2.$$

La 5^a. finalmente che dietro al parallelepipedo il fluido si abbassi sotto il livello di $\epsilon = \frac{1}{64} u^2 \sin^2 \theta$. In fatti

eseguite le necessarie integrazioni di tali formole, e sottratto dall'integrale completo delle pressioni elementari anteriori l'integrale completo delle pressioni elementari posteriori, si trova che la resistenza del fluido è per appunto espressa dalla formola (R').

65. Quanto alla prima ipotesi si osserverà, che il fluido davanti al parallelepipedo a faccie inclinate, concepisce un moto simile a quello del fluido davanti al

parallelepipedo a faccie perpendicolari, e descritto al § 42, vale a dire che supposto gc (fig. 11^a) il profilo del parallelepipedo, xz il livello del fluido, il fluido innanzi alla faccia ac movesi per le curve va' , vc , ec., che la velocità per ec cresce in parità di circostanze quanto è più acuto l'angolo delle facce anteriori, e a misura che il fluido si accosta all'estremità inferiore c , il che è del pari conforme ai principj teorici accennati al § 10 della Mem.^a 2.^a *Nuove ricerche* ec. Dunque il fluido innanzi al parallelepipedo avrà, oltre le velocità virtuali $\sqrt{\varepsilon}$, u , anche la velocità reale per le curve suddette, e perciò la pressione non potrà essere giustamente determinata dalla formola $m db . d\varepsilon (\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{8} u \sin \theta)^2$.

66. Che la formola stessa dissenta moltissimo dalla vera, è compiutamente dimostrato anche dalla sperienza.

Eseguite cogli artifizj dei §§ 43.... 48 sopra le tre cassette (fig. 7.^a 8.^a 9.^a.) delle quali la prima avea la faccia anteriore e posteriore inclinata alla base oc prolungata, o alla direzione del moto, sotto l'angolo dcZ di 67°, la 2.^a di 45°, la 3.^a di 23°.

A rendere più sicuro il moto orizzontale di tali cassette, o parallelepipedi, ritrovai giovevolissimo, ch'esse fossero unite ai sostegni CF e (fig. 10.^a.) doppj dei sostegni cF (fig. 4.^a.) della cassetta e g (fig. 5.^a.) a facce normali alla base.

I risultati di tali sperienze, siccome pure i corrispondenti, calcolati con la formola $m db . d\varepsilon (\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{8} u \sin \theta)^2$ sono registrati nelle quattro seguenti Tavole.

I

Immersione 12 pollici	Angolo θ 67° .	Velocità 8 piedi in $3''$, $20'''$	Altezza dovuta alla velocità $13,74$
<i>Altezze</i>	<i>Pressioni dello sperimento</i>	<i>Pressioni della formola</i>	<i>Differenze</i>
Linee	Linee	Linee	Linee
130	136 , 00	219 , 45	+ 83 , 45
100	110 , 00	179 , 38	+ 69 , 38
91	103 , 00	167 , 74	+ 64 , 74
39	51 , 50	93 , 25	+ 41 , 75
10	24 , 00	43 , 22	+ 9 , 22

II

Immersione 12 pollici	Angolo θ 45° .	Velocità 8 piedi in $4''$	Altezza dovuta alla velocità $9,54$ linee
<i>Altezze</i>	<i>Pressioni dello sperimento</i>	<i>Pressioni della formola</i>	<i>Differenze</i>
Linee	Linee	Linee	Linee
133	132 , 90	188 , 14	+ 55 , 24
108	111 , 75	158 , 16	+ 46 , 41
78	82 , 50	121 , 34	+ 38 , 34
54	59 , 75	90 , 36	+ 31 , 11
24	30 , 50	50 , 16	+ 19 , 66

I I I

Immersione 12 pollici	Angolo θ 23°.	Velocità 8 piedi in 5"	Altezza dovuta alla velocità 6,02 lin.
<i>Altezze ϵ</i>	<i>Pressioni dello sperimento</i>	<i>Pressioni della formola</i>	<i>Differenze</i>
Linee	Linee	Linee	Linee
129	127, 50	151, 51	+ 24, 01
112	112, 00	133, 02	+ 21, 02
84	84, 25	102, 30	+ 18, 05
57	58, 00	72, 30	+ 14, 30
26	28, 00	36, 51	+ 8, 51

I V

Immersione 12 pollici	Angolo θ 23°.	Velocità 8 piedi in 3", 42'''	Altezza dovuta alla velocità 11,34 linee
<i>Altezze ϵ</i>	<i>Pressioni dello sperimento</i>	<i>Pressioni della formola</i>	<i>Differenze</i>
Linee	Linee	Linee	Linee
129	127, 34	158, 79	+ 31, 45
112	111, 75	139, 86	+ 28, 11
84	84, 50	108, 33	+ 23, 83
57	58, 20	77, 32	+ 19, 12
26	28, 50	40, 22	+ 11, 72

Dal così grande dissenso delle pressioni della speranza e quelle della formola si raccoglierà ch'essa senza alcun dubbio non esprime le vere pressioni.

67. Sopra la seconda ipotesi, vale a dire, che il fluido s'inalzi davanti al parallelepipedo della quantità

$$\varepsilon = \frac{1}{64} u^2 \sin^2 \theta \text{ si ponno fare a rigore i ragionamenti}$$

del § 50, d'onde si conchiuderà ch'essa non è meno erronea della prima.

68. Il confronto ch'io presento degli innalzamenti osservati nelle mie sperienze coi calcolati mediante

la formola $\frac{1}{64} u^2 \sin^2 \theta$ ci renderà certi, ch'essa è contraddetta pienamente anche dal fatto.

I

Angolo $\theta = 67^\circ$.		Immersione 12 pollici	
<i>Altezze dovute alla velocità</i>	<i>Innalzamenti osservati</i>	<i>Innalzamenti secondo la formola $\frac{1}{64} u^2 \sin^2 \theta$.</i>	<i>Differenze</i>
Linee	Linee	Linee	Linee
13 , 74	16 , 00	11 , 64	— 4 , 36
8 , 45	10 , 00	7 , 01	— 2 , 99

II

Angolo $\theta = 45^\circ$.		Immersione 12 pollici	
<i>Altezze dovute alla velocità</i>	<i>Innalzamenti osservati</i>	<i>Innalzamenti secondo la formola $\frac{1}{8} u^2 \sin^2 \theta$.</i>	<i>Differenze</i>
Linee	Linee	Linee	Linee
10 , 86	12 , 50	5 , 43	— 7 , 07
6 , 11	4 , 25	3 , 05	— 1 , 20

III

Angolo $\theta = 23^\circ$.		Immersione 12 pollici	
<i>Altezze dovute alla velocità</i>	<i>Innalzamenti osservati</i>	<i>Innalzamenti secondo la formola $\frac{1}{8} u^2 \sin^2 \theta$</i>	<i>Differenze</i>
Linee	Linee	Linee	Linee
14 , 45	15 , 00	2 , 20	— 12 , 80
5 , 54	11 , 00	1 , 45	— 10 , 55

69. Dai ragionamenti del § 53 s'inferirà non potersi assumere per vera neppure la 3^a. ipotesi, cioè che la pressione sopra un differenzio-differenziale della

porzione della faccia colpita dal fluido che s'innalza, sia

$$m d b . d \varepsilon \left(- \sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{8} u \sin \theta \right)^2 .$$

70. A rinforzare vie maggiormente la giustezza di tale conclusione presento le grandi disparità rinvenute tra le pressioni della formola, e quelle raccolte da esatti e ripetuti sperimenti.

I

Immersione 12 pollici		Velocità di 8 piedi in 3", 20'''	
Angolo $\theta = 67^\circ$.		Innalzam°. del fluido 16 lin.	
<i>Altezze - s</i>	<i>Pressioni osservate</i>	<i>Pressioni secondo la formola</i>	<i>Differenze</i>
Linee	Linee	Linee	Linee
2 , 00	13 , 00	3 , 99	— 9 , 01
9 , 50	6 , 00	0 , 10	— 5 , 90
12 , 00	3 , 00	0 , 03	— 2 , 97

II

Immersione 12 pollici		Velocità 8 piedi in 4"	
Angolo $\theta = 45^\circ$.		Innalzam ^o . del fluido 11 lin.	
<i>Altezze - ε</i>	<i>Pressioni osservate</i>	<i>Pressioni secondo la formola</i>	<i>Differenze</i>
Linee	Linee	Linee	Linee
3 , 00	8 , 00	0 , 20	— 7 , 80
5 , 00	3 , 50	0 , 00	— 3 , 50
8 , 00	3 , 00	0 , 42	— 2 , 58

III

Immersione 12 pollici		Velocità 8 piedi in 3", 15"	
Angolo $\theta = 23^\circ$.		Innalzam ^o . del fluido 15 lin.	
<i>Altezze - ε</i>	<i>Pressioni osservate</i>	<i>Pressioni secondo la formola</i>	<i>Differenze</i>
Linee	Linee	Linee	Linee
3 , 50	8 , 00	0 , 14	— 7 , 86
5 , 00	6 , 75	0 , 56	— 6 , 19
11 , 75	1 , 50	3 , 77	+ 2 , 27

71. Per ciò che riguarda la quarta ipotesi, cioè che la pressione sopra un differenzio-differenziale della faccia posteriore del fluido sia

$m \, d b \cdot d \varepsilon \left(\sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{8} u \sin \theta \right)^2$ osserveremo che come nel

caso delle faccie del parallelepipedo normali alla base, così nelle oblique, il fluido oltre le velocità vir-

tuali $\sqrt{\varepsilon}$, $\frac{1}{8} u$ concepisce un moto reale simile affat-

to a quello che concepisce dietro ad una lamina obliqua, e descritto al § 11; mem. 2^a. *Nuove ricerche* ec. ch'è quanto dire che il fluido dal punto E (fig. 11^a), dove si è abbassato, si muove verso l'estremità inferiore h , e con tanto maggiore velocità quanto è minore l'angolo $E h c$. Quindi pel § 65 la pressione sopra un differenzio-differenziale di $E h$ non potrà es-

sere rappresentata da $m \, d b \cdot d \varepsilon \left(\sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{8} u \sin \theta \right)^2$.

72. Finalmente consultando le differenze contenute nelle seguenti tavole tra le pressioni dell'esperimento e quelle della formola saremo convinti che essa non conviene per niente con la vera.

I

Immersione 12 pollici	Angolo θ 67° .	Velocità 8 piedi in $3''$, $20'''$	Altezze dovute alla velocità $13,74$ lin.
<i>Altezze ϵ</i>	<i>Pressioni dello sperimento</i>	<i>Pressioni della formola</i>	<i>Differenze</i>
Linee	Linee	Linee	Linee
130	126 , 33	63 , 83	— 62 , 50
100	95 , 25	43 , 40	— 51 , 85
91	87 , 00	37 , 55	— 49 , 45
39	36 , 00	8 , 02	— 27 , 98
10	7 , 00	0 , 06	— 6 , 94

II

Immersione 12 pollici	Angolo θ 45° .	Velocità 8 piedi in $4''$	Altezze dovute alla velocità $9,54$
<i>Altezze ϵ</i>	<i>Pressioni dello sperimento</i>	<i>Pressioni della formola</i>	<i>Differenze</i>
Linee	Linee	Linee	Linee
133	129 , 50	87 , 29	— 42 , 21
108	104 , 67	67 , 37	— 37 , 30
78	73 , 75	44 , 19	— 29 , 56
54	49 , 00	26 , 67	— 22 , 33
24	19 , 00	7 , 37	— 11 , 63

III

Immersione 12 pollici	Angolo θ 23°.	Velocità 8 piedi in 4''	Altezza dovuta alla velocità 9, 54
<i>Altezze ϵ</i>	<i>Pressioni dello sperimento</i>	<i>Pressioni della formola</i>	<i>Differenze</i>
Linee	Linee	Linee	Linee
129	126, 10	103, 04	— 22, 96
112	108, 20	87, 91	— 23, 09
84	79, 00	63, 33	— 15, 67
57	49, 00	40, 23	— 8, 77
26	18, 00	15, 15	— 2, 85

73. Se la formula delle pressioni sopra i differenzio-differenziali della faccia posteriore del parallelepipedo è falsa, non sarà nemmeno vero (§ 58) che il fluido debba abbassarsi della quantità $\epsilon = \frac{1}{64} u^2 \sin^2 \theta$.

74. La grande imperfezione anche di questa ipotesi è pienamente dimostrata dalle differenze che pongo sott'occhio tra i veri abbassamenti, e quelli che offre la ipotesi stessa.

I

Angolo $\theta = 67^\circ$.		Immersione 12 pollici	
<i>Altezze dovute alla velocità</i>	<i>Abbassamenti osservati</i>	<i>Abbassamenti secondo la formola</i>	<i>Differenze</i>
Linee	Linee	Linee	Linee
13 , 74	4 , 00	11 , 64	+ 7 , 64
8 , 45	1 , 50	7 , 01	+ 5 , 51

II

Angolo $\theta = 45^\circ$.		Immersione 12 pollici	
<i>Altezze dovute alla velocità</i>	<i>Abbassamenti osservati</i>	<i>Abbassamenti secondo la formola</i>	<i>Differenze</i>
Linee	Linee	Linee	Linee
10 , 86	4 , 50	5 , 43	+ 0 , 93
6 , 11	2 , 17	3 , 05	+ 0 , 88

III

Angolo $\theta = 23^\circ$.		Immersione 12 pollici	
<i>Altezze dovute alla velocità</i>	<i>Abbassamenti osservati</i>	<i>Abbassamenti secondo la formola</i>	<i>Differenze</i>
Linee	Linee	Linee	Linee
14 , 45	13 , 33	2 , 20	— 11 , 13
9 , 54	6 , 50	1 , 45	— 5 , 05

75. Ora se tutte le ipotesi fin qui esaminate sono manifestamente contraddette da giusti e sicuri ragionamenti non meno che da esatte e ripetute sperienze, è manifesto che dovrà essere per lo meno inal sicura la conseguenza che se ne trae, che vale quanto dire la formola (R') della resistenza.

Per assicurarci poi ch'essa è pure realmente assai lontana dalla vera, basterà dare un'occhiata alle sperienze eseguite sopra parallelepipedì a prore e poppe oblique dagli altre volte menzionati matematici parigini, e all'articolo 353 degli elementi d'Idraulica del sig. Prof. Venturoli.

76. Così noi potremo conchiudere con sicnrezza che le leggi tanto della resistenza diretta che obliqua di parallelepipedì immersi in parte nel fluido rin-

venute con la teoria di Juan sono assolutamente da rifiutarsi del tutto e ciò principalmente perchè le pressioni elementari sulla faccia anteriore e posteriore dei detti solidi non vogliansi esprimere con le formole

$$m d b . d \epsilon (\sqrt{\epsilon} \pm \frac{1}{8} u)^2, \quad m d b . d \epsilon (\sqrt{\epsilon} \pm \frac{1}{8} u \sin \theta)^2 .$$

77. In una delle mie susseguenti memorie *Nuove ricerche* ec. vedremo quali sieno le formole delle pressioni elementari più consentanee ai veri principj idrodinamici ed alla sperienza; intanto ci gioverà l'osservare che quand' anche potesse omettersi, come si fa da Juan, la velocità del fluido moventesi lungo le due facce del parallelepipedo, le formole

$$m d b . d \epsilon (\epsilon \pm h), \quad m d b . d \epsilon (\epsilon \pm h \sin^2 \theta),$$

ch' egli (a) riprova, sono ben più conformi al fatto delle sue proprie

$$m d b . d \epsilon (\sqrt{\epsilon} \pm \sqrt{h})^2, \quad m d b . d \epsilon (\sqrt{\epsilon} \pm \sqrt{h} \sin \theta)^2.$$

A persuadersene più agevolmente, e con maggiore evidenza basterà che si confrontino col mezzo delle seguenti tavole le differenze tra le pressioni ottenute dalle sperienze de' paragrafi precedenti, e quelle che porgono le formole sopraccennate.

(a) § 644. Examen maritime ec.

Differenze
fra le pressioni sperimentali, e delle formole

$$(\varepsilon + h), (\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{8}u)^2$$

I

Immersione 12 pollici		$h = 2, 17$ linee
Altezze ε	Differenze tra lo spe- rim ^o . e $(\varepsilon + h)$	Differenze tra lo spe- rim ^o . e $(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{h})^2$
Linee	Linee	Linee
24	— 1, 63	+ 12, 77
36	— 1, 58	+ 16, 02
48	— 1, 43	+ 18, 97
60	— 1, 33	+ 21, 47
72	— 1, 33	+ 23, 73
84	— 1, 33	+ 25, 67
96	— 1, 33	+ 27, 67
108	— 1, 33	+ 29, 07
120	— 1, 16	+ 31, 24
132	— 0, 63	+ 33, 24

II

Immersione 12 pollici		$h = 4,40$ linee
Altezze ε	Differenze tra lo spe- rim ^o , $c(\varepsilon + h)$	Differenze tra lo spe- rim ^o , $c(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{h})^2$
Linee	Linee	Linee
24	— 2, 10	+ 18, 50
36	— 2, 00	+ 23, 20
48	— 1, 93	+ 27, 27
60	— 1, 85	+ 30, 65
72	— 1, 85	+ 33, 75
84	— 1, 85	+ 36, 55
96	— 1, 85	+ 39, 35
108	— 1, 85	+ 41, 75
120	— 1, 60	+ 44, 40
132	— 0, 85	+ 47, 15

III

Immersione 12 pollici		$h = 5,36$ linee
Altezze ϵ	Differenze tra lo spe- rim ^o . e $(\epsilon + h)$	Differenze tra lo spe- rim ^o . e $(\sqrt{\epsilon} + \sqrt{h})^2$
Linee	Linee	Linee
24	— 3,24	+ 19,60
36	— 3,14	+ 24,46
48	— 2,97	+ 29,03
60	— 2,97	+ 33,03
72	— 2,97	+ 36,25
84	— 2,97	+ 39,43
96	— 2,97	+ 42,43
108	— 2,89	+ 44,87
120	— 2,64	+ 48,05
132	— 0,64	+ 52,96

T. II.

P. II.

Differenze
tra le pressioni sperimentali e delle formole

$$(\varepsilon - h), \left(\sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{8}u\right)^2$$

I

Immersione 12 pollici		$h = 2, 17$ linee
<i>Altezze</i> ε	<i>Differenze</i> tra lo sperim ^o ., e la formola $(\varepsilon - h)$	<i>Differenze</i> tra lo sperim ^o ., e la formola $(\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{h})^2$
Linee	Linee	Linee
24	— 2, 12	— 12, 18
36	— 2, 17	— 15, 33
48	— 2, 05	— 18, 11
60	— 2, 03	— 20, 49
72	— 2, 01	— 22, 67
84	— 2, 01	— 25, 67
96	— 2, 01	— 26, 67
108	— 2, 01	— 28, 27
120	— 2, 01	— 29, 91
132	— 2, 07	— 31, 50

II

Immersione 12 pollici		$h = 4,40$ linee
<i>Altezze</i> ε	<i>Differenze</i> tra lo sperim ^o ., e la formola $(\varepsilon - h)$	<i>Differenze</i> tra lo sperim ^o ., e la formola $(\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{h})^2$
Linee	Linee	Linee
24	— 4, 00	— 15, 80
36	— 3, 90	— 20, 30
48	— 3, 50	— 23, 90
60	— 3, 40	— 27, 00
72	— 2, 90	— 29, 70
84	— 2, 90	— 32, 50
96	— 3, 20	— 35, 60
108	— 3, 20	— 38, 00
120	— 3, 20	— 40, 40
132	— 3, 50	— 42, 86

III

Immersione 12 pollici		$h = 5, 36$ linee
<i>Altezze</i> ϵ	<i>Differenze</i> <i>tra lo sperim^o., e la</i> <i>formola $(\epsilon - h)$</i>	<i>Differenze</i> <i>tra lo sperim^o., e</i> $(\sqrt{\epsilon} - \sqrt{h})^2$
Linee	Linee	Linee
24	— 4, 96	— 16, 90
36	— 4, 46	— 21, 60
48	— 4, 36	— 25, 64
60	— 4, 36	— 29, 50
72	— 4, 26	— 32, 84
84	— 4, 26	— 35, 94
96	— 4, 46	— 39, 14
108	— 4, 46	— 41, 54
120	— 4, 46	— 44, 94
132	— 4, 56	— 46, 99

*Differenze**tra le pressioni dello sperimento, e delle formole*

$$m d b . d \varepsilon (\varepsilon + h \sin^2 \theta), \quad m d b . d \varepsilon (\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{8} u \sin \theta)^2$$

I

$\theta = 67^\circ.$		$h = 13,74$
Altezze ε	Differenze tra lo sperimento. e la formola $(\varepsilon + h \sin^2 \theta)$	Differenze tra lo sperimento. e la formola $(\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{8} u \sin \theta)^2$
Linee	Linee	Linee
10	— 2,36	+ 9,22
39	— 0,86	+ 41,75
91	— 0,36	+ 64,74
100	+ 1,64	+ 69,88
130	+ 5,64	+ 83,45

II

$\theta = 45^\circ.$		$h = 9,54$
Altezze ε	Differenze tra lo sperimento. e la formola $(\varepsilon + h \sin^2 \theta)$	Differenze tra lo sperimento. e la formola $(\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{8} u \sin \theta)^2$
Linee	Linee	Linee
24	— 1,73	+ 19,66
54	— 0,98	+ 31,11
78	+ 0,27	+ 38,84
108	+ 1,02	+ 46,41
133	+ 4,87	+ 55,24

III

$\theta = 23^\circ.$		$h = 9,54$ linee
<i>Altezze ϵ</i>	<i>Differenze tra lo sperim. e la formola ($\epsilon - h \sin^2 \theta$)</i>	<i>Differenze tra lo sperim. e $(\sqrt{\epsilon} - \frac{1}{8} u \sin \theta)^2$</i>
Linee	Linee	Linee
26	— 0,77	+ 11,72
57	+ 0,53	+ 19,12
84	+ 1,23	+ 23,83
112	+ 1,98	— 28,11
129	+ 3,39	— 31,45

Differenze.

tra le pressioni dello sperimento e delle formole

$$m d b . d \varepsilon (\varepsilon - h \sin^2 \theta), \quad m d b . d \varepsilon (\sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{8} u \sin \theta)^2$$

I

$\theta = 67^\circ.$		$h = 13, 74$
Altezze ε	Differenze tra lo speriment. $e (\varepsilon - h \sin^2 \theta)$	Differenze tra lo speriment. $e (\sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{8} u \sin \theta)^2$
Linee	Linee	Linee
10	— 8, 64	— 6, 94
39	— 8, 65	— 27, 98
91	— 7, 65	— 49, 45
100	— 6, 90	— 51, 85
130	— 7, 98	— 62, 50

II

$\theta = 45^\circ.$		$h = 9, 54$
Altezze ε	Differenze tra lo speriment. $e (\varepsilon - h \sin^2 \theta)$	Differenze tra lo speriment. $e (\sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{8} u \sin \theta)^2$
Linee	Linee	Linee
24	+ 0, 23	— 11, 63
54	+ 0, 23	— 22, 33
78	— 0, 52	— 29, 56
108	— 1, 44	— 37, 30
133	— 1, 27	— 42, 21

III

$\theta = 23^\circ.$		$h = 9,54 \text{ linee}$
Altezze ε	Differenze tra lo sperim. $c (\varepsilon - h \sin^2 \theta)$	Differenze tra lo sperim. $c (\sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{8} u \sin \theta)^2$
Linee	Linee	Linee
26	+ 6,54	— 2,85
57	+ 6,54	— 8,77
84	+ 3,54	— 15,67
112	+ 3,34	— 23,09
129	+ 1,54	— 22,96

78. Un'altra prova che la formula $m db . d\varepsilon (\varepsilon \pm h)$ esser dee molto meno inesatta della formola

$m db . d\varepsilon (\sqrt{\varepsilon} \pm \frac{1}{8} u)^2$ si è questa: che la resistenza

ottenuta dalla prima s' accosta assai più a quella offertaci dagli sperimenti che non fa la resistenza dedot-

ta dalla seconda. Per la $m db . d\varepsilon (\varepsilon \pm \frac{1}{8} u)$ la resisten-

za dovrebbe essere $\frac{1}{32} m b a u^2$ (a), ossia $2 m b a h$, e

per la $m db . d\varepsilon (\sqrt{\varepsilon} \pm \frac{1}{8} u)^2$, $\frac{m b}{3} (u \varepsilon \sqrt{\varepsilon} + \frac{u^4}{64^2})$,

(a) § 644. Opera citata.

(§ 39), ossia $\frac{m b}{3} (8 a \sqrt{a h} + h^2)$ supposta h l'altezza dovuta alla velocità u . Dal confronto di queste resistenze con quelle degli sperimenti del § 62 risultano le differenze notate nelle seguenti tavole.

I

$b = \frac{56}{36}$ piedi		$a = \frac{25}{24}$ piedi
Mezzi 1" spesi a percorrere 50 piedi	Differenze tra le resistenze sperimentali, e $2 m b a h$	Differenze tra le resistenze sperimentali, e $\frac{m b}{3} (8 a \sqrt{a h} + h^2)$
	Marchi	Marchi
41, 75	8	72
37, 80	10	76
34, 75	11	80
32, 50	10	81
29, 90	11	84

II

$b = \frac{56}{36}$ piedi		$a = \frac{25}{24}$ piedi
Mezzi 1" spesi a percorrere 50 piedi	Differenze tra le resistenze sperimentali, e $2 a m b h$	Differenze tra le resistenze sperimentali, e $\frac{m b}{3} (8 a \sqrt{a h} + h^2)$
	Marchi	Marchi
52, 00	8	119
46, 05	11	133
42, 07	13	144
37, 25	18	159
35, 18	19	165

T. II.

P. II.

15

III

$b = \frac{56}{36}$ piedi		$a = \frac{25}{24}$ piedi
Mezzi 1 ^a spesi a percorrere 50 piedi	Differenze tra le resistenze sperimentali, e $2 a m b h$	Differenze tra le resistenze sperimentali, e $\frac{m b}{3} (3 a \sqrt{u h} + h^2)$
	Marchi	Mar hi
50, 75	13	181
46, 50	15	196
41, 00	19	217
36, 50	24	240
33, 69	27	255

79. Per ciò che riguarda gli esperimenti ai quali il sig. Juan appoggia la sua teoria in generale abbiamo già detto al § 6 che tutti restringonsi ai cinque accennati nel paragrafo stesso. Ora vedremo che da nessuno di essi niente si può al certo inferire nè pro nè contro le formole fin qui esaminate, e ch'egli, fondato massimamente sui risultati di quei esperimenti, crede di dover adottare per vere.

E primieramente è manifesto ch'essi non ponno decidere circa le formole delle pressioni elementari, non essendovene alcuno col quale siensi investigate tali pressioni.

Egli è poi facile da conoscere che non ponno decidere nemmeno della verità o falsità delle formole (R) , (R') della resistenza.

Non i due primi, dei piani rettangolari esposti perpendicolarmente all'azione di due correnti d'acqua,

poichè quand' anche essi piani non fossero stati affatto immersi nell'acqua, è evidente che gli urti del fluido potrebbero non differire grandemente da quelli delle formole (R) , (R') non già perchè esse fosser vere ma solamente perchè il solido fosse un piano sottile, non un parallelepipedo, e perchè fosse il fluido che si movesse contro il piano, e non il piano contro il fluido, come lo richiederebbe il caso che si esamina. In fatti non potrebbe essere che intanto il piano immerso a maggiore profondità nella corrente avesse incontrata maggior resistenza che immerso a profondità minore, unicamente perchè a maggiore profondità l'acqua avesse velocità maggiore? Negli sperimenti di Juan non è notato se la velocità della corrente siasi misurata misurando la velocità della superficie, oppure la velocità media delle due correnti d'acqua urtanti il piano nelle due differenti altezze. Quando parlerò della teoria di Juan relativa all'urto de' fluidi discuterò con maggiore dettaglio i ragionamenti fatti su tali sperienze.

Intanto rifletteremo che se queste potessero provare in favore della formola che riguarda la resistenza incontrata da un parallelepipedo moventesi per l'acqua tranquilla, a più forte ragione dovrebbero decidere in favore della formola medesima gli sperimenti del § 62. Ora essendo questi, sebbene eseguiti nell'acqua quieta e sopra parallelepipedi, contrarj del tutto alla formola sopraddetta, ne dedurremo di necessaria conseguenza che gli sperimenti dei piani immersi nella corrente debbono essere insufficienti per lo meno a provare la verità della formola medesima.

Veramente fa sorpresa che ipotetiche come sono per sua stessa confessione (a) le formole di Juan, si voglia da esso, e da alcun altro geometra, che lo sperimento particolare de' piani immersi nella corrente comproui le formole suddette, e più ancora sorprenderebbe se questo sperimento si volesse preferire agli sperimenti da noi istituiti o citati che le dimostrano tanto lontane dalle vere.

80. Io certamente non vorrò poi persuadermi che da qualcuno possa avvisarsi essere troppo in piccolo i nostri come i sperimenti de' matematici francesi, onde possan decidere veramente contro la teoria di Juan. E quanto ai nostri mi restringerò a far riflettere che eseguiti in grande, ch'è quanto dire, con parallelepipedi che s'immergono a maggiori altezze ϵ , e si muovano con maggiore velocità u , ben lontani dal favorire la teoria del geometra spagnuolo dovrebbero per lo contrario mostrarne più decisamente l'imperfezione. In fatti considerando le tavole degli sperimenti del § 49 si vede che le differenze tra i risultati della formola

$mdb.d\epsilon(\sqrt{\epsilon} + \frac{1}{8}u)^2$ e quelli della sperienza crescono moltissimo e regolarmente crescendo ϵ , ed u .

Circa gli sperimenti de' matematici francesi da nessuno ch'io sappia si è messo in dubbio se essi possano essere decisivi per cagione della loro picciolezza, e farebbe certo sorpresa se questi sperimenti fatti con tanta esattezza, e ripetuti tante volte, e de' quali non pochi furono istituiti più in grande di quelli de' piani im-

(a) § 644. Opera citata.

mersi nella corrente, si volessero posporre agli sperimenti de' piani medesimi, quand'anche quelli provassero pur qualche cosa in favore di Juan.

81. Quanto al 3° sperimento di questo geometra consistente nella velocità delle navi la quale, calcolata con la sua formola, trovò convenire con la velocità osservata, dico che neppur esso come i due primi può comprovare la giustezza della sua teoria nella parte che riguarda il caso che presentemente consideriamo.

Quando parlerò della teoria di questo geometra relativa ai solidi dotati di una figura simile a quella de' bastimenti, vedremo che neppure la corrispondenza tra la velocità delle navi calcolata con la sua formola, e la velocità osservata, è sufficiente a dimostrare ch'essa formola possa adottarsi come vera almeno in questa circostanza, che sarebbe delle più importanti.

Ma una tal prova sia pur anche se si vuole favorevole alla teoria spettante alla resistenza incontrata da' bastimenti, dico ch'essa poi non può esserlo in alcun modo alla teoria medesima applicata al caso de' parallelepipedi. In fatti non potrebb'essere ch'essa teoria fosse falsa in riguardo ai parallelepipedi e che gli errori ch'essa contiene venissero a distruggersi quando si applica alla resistenza incontrata dalle navi dotate di una figura ben differente da quella de' parallelepipedi?

82. Finalmente per ciò che spetta al quarto e quinto sperimento di Juan è manifesto ch'essi appartengono a due casi troppo diversi da quello che si è finora discusso, e che quindi non ponno assolutamente addursi in prova della verità della formola spettante al caso medesimo.

CORREZIONI E NOTE

ad alcuni paragrafi delle memorie precedenti

(1) Le due ultime tavole del § 5 (*Osservazioni, e sperienze sopra la teoria della resistenza de' fluidi del sig. Juan*) si cangino nelle seguenti.

<i>Pressioni dello sperimento</i>	<i>Pressioni della formola</i>	<i>Differenze</i>
Linee	Linee	Linee
201	318 , 07	117 , 07
202	319 , 24	117 , 24
204	328 , 96	124 , 96
205	332 , 52	127 , 52
222	387 , 64	165 , 64
225	399 , 29	174 , 29
230	414 , 75	184 , 75
232	419 , 74	187 , 74

<i>Pressioni dello sperimento</i>	<i>Pressioni della formola</i>	<i>Differenze</i>
Linee	Linee	Linee
171 , 00	82 , 84	— 88 , 16
170 , 95	80 , 97	— 89 , 98
163 , 95	59 , 89	— 104 , 06
151 , 00	40 , 26	— 110 , 74
150 , 00	38 , 71	— 111 , 29

(2) Nel § 36 della stessa memoria in luogo della espressione

$$(b + B)(x + \mu + h) - \frac{2 \cdot 22}{7} \int z dz \cdot u$$

$$- (b' + B')(x + \alpha + \mu' - h) + \frac{2 \cdot 22}{7} \int z' dz' \cdot u' \text{ si legga}$$

$$(b + B)(x + h) + b \cdot \mu - \frac{2 \cdot 22}{7} \int z dz \cdot u$$

$$- (b' + B')(x + \alpha - h) - b' \cdot \mu' + \frac{2 \cdot 22}{7} \int z' dz' \cdot u'$$

e invece della formola .. (a) si ponga

$$A(2h - \alpha) + b \cdot \mu - b' \cdot \mu' - \frac{2 \cdot 22}{7} (\int z dz \cdot u - \int z' dz' \cdot u')$$

(3) L'equilibrio delle lamine che servirono agli sperimenti della memoria 1.^a *Nuove ricerche* ec. si ottenne (come può rilevarsi dal § 19 di essa memoria, e dai §§ precedenti, e successivi) quando esse lamine trovavansi già del tutto immerse nel fluido. Di modo che il così da me detto *centro di gravità delle lamine* era il centro comune della loro gravità assoluta, e della spinta verticale del fluido. Da ciò, e da quanto io feci osservare nella suddetta memoria rendesi manifesto che nei sopraccennati sperimenti la spinta verticale del fluido non poteva in alcun modo distrarre dall'asse dell'equilibrio delle lamine il centro di resistenza ad esse opposta dal fluido, e che il principio da me assunto, che il centro di detta resistenza dovea cadere su l'asse medesimo d'equilibrio è rigorosamente e generalmente vero.

(4) Gli sperimenti del § 28 (*Osservazioni, e sperienze sopra la teoria di Juan*) si fecero in un gran vaso d'acqua alto più di cinque piedi, e largo quattro incirca, così che si scorgevano benissimo i moti del pendolo descritti nel medesimo § 28.

M E M O R I A

S O P R A I C R I T E R J

*che distinguono i Massimi dai Minimi delle Formole
Integrali doppie.*

D I V I N C E N Z I O B R U N A C C I

ricevuta il dì 8 di Aprile 1809

Io non so che alcuno siasi avvisato di spingere le dottrine sopra i criterj che distinguono il massimo dal minimo, sino alle formole integrali doppie. Egli è vero che tal ricerca è una delle più scabrose nel perfezionamento dell'analisi; ma è altresì indubitato che essa è importantissima per la determinazione di quelle superficie, le quali goder debbono di una certa proprietà di massimo e di minimo.

Per ciò che riguarda le formole integrali semplici Legendre il primo ne assegnò i criterj (1). Riprese a trattare questa dottrina il Lagrange ed alcune condizioni aggiunse alle formole del primo (2).

In seguito (3) io mostrai come Legendre, tra-

(1) Atti d-ll' Acc. R. di Francia del 1736.

(2) Teoria delle Funz. Analit.

(3) Atti dell' Ist. Naz. Ital. Tom. I. P. II.

Tom. II. P. II.

scurando alcuni termini differenziali del secondo ordine, che ci doveva apprezzare, si era ingannato in una certa classe di casi, e corressi le di lui formole.

Ora mi propongo in questa memoria d'indagare i criterj per distinguere il massimo dal minimo delle formole integrali doppie, cioè di $\iint \Psi \, dx \, dy$, e così di portare un qualche avanzamento nella dottrina generale dei massimi e dei minimi. (1)

Onde poi riesca più semplice la lettura di questo scritto, incomincerò a trattare di nuovo le teorie sopra i criterj degli integrali semplici, per così farmi strada a quelle, che sono l'oggetto della memoria.

§. 1. Essendo Ψ una funzione di x, y , si dimandi qual relazione esister debbe tra quelle due variabili, onde $\int \Psi \, dx$ riceva un valor massimo o minimo estendendo l'integrale da $x = a$ sino ad $x = b$; e quale debbe essere il criterio per distinguere il massimo dal minimo.

Se noi indichiamo per ω una quantità qualunque indeterminata funzione di x, y , le teorie spiegate nel cap. 16. del mio corso di cal. sublime ci danno l'equazione $(\frac{d\Psi}{dy}) = 0$ per stabilire quella relazione tra x ed y .

Le stesse poi ci dicono che per distinguere il massimo dal minimo conviene esaminare se l'integra-

le $\int \omega^2 (\frac{d^2\Psi}{dy^2}) \, dx$ esteso tra i limiti $x = a, x = b$ è

(1) Questa dottrina generale di massimi e minimi è anche conosciuta sotto il titolo di Calcolo delle Variazioni.

una quantità positiva o negativa: se è positiva la formola $\int \Psi dx$ è minima; e nel caso diverso è massima.

Ora nel luogo citato si dimostra questo Teorema
 „ L' integrale $\int f(x) dx$ esteso tra i limiti $x = a$,
 „ $x = b$, essendo $b > a$ è sempre una quantità posi-
 „ tiva se tale sempre si conserva $f(x)$ per tutti i va-
 „ lori possibili che ponno darsi ad x compresi tra
 „ $x = a$, $x = b$, purchè però nessuno di questi va-
 „ lori renda infiniti alcuni dei coefficienti differen-
 „ ziali $(\frac{df}{dx})$, $(\frac{d^2f}{dx^2})$, ec.; ovvero è negativa se quei
 „ valori sono tutti negativi.

Dunque l' integrale $\int \omega^2 (\frac{d^2\Psi}{dy^2}) dx$ esteso tra i
 limiti $x = a$, $x = b$ è positivo, se la quantità $(\frac{d^2\Psi}{dy^2})$
 è positiva per tutti i valori di x tra i limiti a , b ; e
 negativo se quella quantità è negativa per gli stessi
 valori; dunque la relazione tra x, y condurrà al mas-
 simo o minimo se la quantità $(\frac{d^2\Psi}{dy^2})$ è negativa o po-
 sitiva per tutti i valori di x compresi tra $x = a$, $x = b$.

A questa condizione conviene aggiungere che
 rappresentando $(\frac{d^2\Psi}{dy^2})$ per $F(x)$, non sia infinita al-
 cuna delle funzioni $F(x)$, $(\frac{dF}{dx})$, $(\frac{d^2F}{dx^2})$, ec. per qual-
 cheduno di quei valori di x .

§. 2. Essendo Ψ una funzione di x, y , $(\frac{dy}{dx}) = p$,

il Cap. citato nel § ant. ci insegna che la relazione

dataci dall'equazione $(\frac{d\Psi}{dy}) - \frac{1}{dx} d(\frac{d\Psi}{dp}) = 0$, ren-

derà l'integrale $\int \Psi dx$ massimo o minimo tra i limiti dati $x = a$, $x = b$; e che per distinguere il massimo dal minimo conviene esaminare se indipendentemente dal valore di ω , l'integrale

$$\int \left\{ \omega^2 \left(\frac{d^2 \Psi}{dy^2} \right) + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d^2 \Psi}{dy dp} \right) + \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 \left(\frac{d^2 \Psi}{dp^2} \right) \right\} dx,$$

è una quantità negativa o positiva, esteso tra i limiti $x = a$, $x = b$.

Indichiamo per L, M, N quei coefficienti differenziali, e l'integrale prenderà la forma

$$\int \left\{ \omega^2 L + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dx} \right) M + \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 N \right\} dx.$$

Sia $C + v\omega^2$ quella porzione sbarazzata dal segno somminatorio, che può ottenersi per mezzo dell'effettiva integrazione, ove C è supposto costante, e v funzione di x .

Avremo allora

$$\begin{aligned} \int \left\{ \omega^2 L + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dx} \right) M + \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 N \right\} dx &= C + v\omega^2 + \int \left\{ \omega^2 \left(L - \left(\frac{dv}{dx} \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dx} \right) (M - v) + \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 N \right\} dx \end{aligned}$$

Dovrà dunque essere questo secondo membro una quantità negativa nel massimo, positiva nel minimo, estesa l' integrazione tra i limiti $x = a$, $x = b$.

Per ciò che riguarda la quantità affetta dal segno integrale, sarà questa una quantità positiva, o negativa se tale è la quantità

$$\omega^2 \left(L - \left(\frac{d v}{d x} \right) \right) + 2 \omega \left(\frac{d \omega}{d x} \right) (M - v) + \left(\frac{d \omega}{d x} \right)^2 N$$

per tutti i valori di x compresi tra a e b .

Ora dalla ordinaria teoria dei massimi e dei minimi si sa che una quantità di questa forma

$$\left(\frac{d \omega}{d x} \right)^2 A + 2 \omega \left(\frac{d \omega}{d x} \right) B + \omega^2 C$$

è positiva indipendentemente dai valori di ω e di

$\left(\frac{d \omega}{d x} \right)$ se le due quantità $A, C - \frac{B^2}{A}$ sono quantità po-

sitive; e negativa se quelle sono negative; dunque quell' integrale sarà una quantità positiva tra i limiti $x = a$, $x = b$, se le quantità

$$N, L - \left(\frac{d v}{d x} \right) - \frac{(M - v)^2}{N}$$

saranno positive per tutti i valori possibili di x da $x = a$ sino ad $x = b$; e sarà la suddetta quantità integrale una quantità negativa, se tali saranno queste due ultime quantità.

Per soddisfare alla condizione che rende positiva, o negativa la seconda di quelle due quantità, noi po-

tremo disporre dell' arbitraria ν , la quale potrebbe anche determinarsi in modo che si annullasse la medesima quantità. Allora il massimo, o minimo ci sarebbe dato dall' essere negativa, o positiva la quantità N , cioè $(\frac{d^2 \Psi}{d\rho^2})$ per tutti i valori di x da $x=a$, sino $x=b$.

Riguardo poi alla porzione sbarazzata dal segno integrale, cioè $C + \nu \omega^2$, estesa questa tra i limiti $x=a$, $x=b$, o debbe esser nulla tanto pel massimo che pel minimo, ovvero positiva nel minimo, e negativa nel massimo. Indichiamo per $(\nu \omega^2)^0$ il valore di $\nu \omega^2$ al principio dell' integrale, cioè quando $x=a$, ed avremo $C + (\nu \omega^2)^0 = 0$, quindi $C = -(\nu \omega^2)^0$, ed $\nu \omega^2 - (\nu \omega^2)^0$ sarà allora quella quantità. Estendiamo l' integrale sino ad $x=b$, e significhiamo per $(\nu \omega^2)^1$ il valore di $\nu \omega^2$ in questo limite, ed avremo $(\nu \omega^2)^1 - (\nu \omega^2)^0$, che debbe essere o nulla tanto pel massimo che pel minimo, o negativa nel massimo e positiva nel minimo, e tutto ciò dando ad ω il valore che le condizioni del problema esigono nei limiti dell' integrale, o lasciandolo indeterminato se quelle condizioni non lo determinano,

A tutte queste condizioni conviene aggiungere che nessuna delle quantità L , M , N , ν , nè dei loro differenziali, divenga infinita per qualcuno di quei valori di x .

§. 3. Essendo Ψ una funzione di x, y , $(\frac{d\Psi}{dx}) = p$, $(\frac{d^2 \Psi}{dx^2}) = q$, se si cerca la relazione tra x ed y onde

l' integrale $\int \Psi dx$ esteso tra i limiti $x = a$, $x = b$, sia un massimo o un minimo, si avrà questa relazione dall' integrazione dell' equazione differenziale

$$\left(\frac{d\Psi}{dy}\right) - \frac{1}{dx} d\left(\frac{d\Psi}{dp}\right) + \frac{1}{dx^2} d^2\left(\frac{d\Psi}{dq}\right) = 0$$

Onde poi distinguer si possa il massimo dal minimo conviene esaminare se la quantità

$$\begin{aligned} \int \left\{ \omega^2 \left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right) + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dx}\right) \left(\frac{d^2\Psi}{dp dy}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 \left(\frac{d^2\Psi}{dp^2}\right) + 2\omega \left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) \left(\frac{d^2\Psi}{dy dq}\right) + \right. \\ \left. + 2\left(\frac{d\omega}{dx}\right) \left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) \left(\frac{d^2\Psi}{dq dp}\right) + \left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)^2 \left(\frac{d^2\Psi}{dq^2}\right) \right\} dx \end{aligned}$$

è negativa o positiva

Scriviamo così quest' integrale

$$\begin{aligned} \int \left\{ \omega^2 M + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dx}\right) N + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 Q + 2\omega \left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) P + 2\left(\frac{d\omega}{dx}\right) \left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) R + \right. \\ \left. + \left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)^2 S \right\} dx \end{aligned}$$

Sia $C + \alpha \omega^2 + 2\beta \omega \left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \gamma \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2$ quella porzione sbarazzata dal segno integrale, che può ottenersi con l' effettiva integrazione. Per C indichiamo una costante, per α , β , γ funzioni di x da determinarsi.

Noi avremo dunque

$$\begin{aligned} \int \left\{ \omega^2 M + \dots + \left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)^2 S \right\} dx = C + \gamma \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 + \alpha \omega^2 + 2\beta \omega \left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \\ \int \left\{ \left[M - \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)\right] \omega^2 + 2\left[N - \alpha - \left(\frac{d\beta}{dx}\right)\right] \omega \left(\frac{d\omega}{dx}\right) + 2(P - \beta) \omega \left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) + \right. \end{aligned}$$

$$[Q - 2\beta - (\frac{d\gamma}{dx})](\frac{d\omega}{dx})^2 + 2(R - \gamma)(\frac{d\omega}{dx})(\frac{d^2\omega}{dx^2}) + S(\frac{d^2\omega}{dx^2})^2 \} dx.$$

Poniamo $S = A$; $R - \gamma = A'$; $P - \beta = A''$; $Q - 2\beta - (\frac{d\gamma}{dx}) = B$; $N - \alpha - (\frac{d\beta}{dx}) = B'$; $M - (\frac{d\alpha}{dx}) = C$, e

l'integrale del secondo membro della superiore equazione prenderà la forma

$$\int \{ A(\frac{d^2\omega}{dx^2})^2 + 2A'(\frac{d\omega}{dx})(\frac{d^2\omega}{dx^2}) + 2A''(\frac{d^2\omega}{dx^2})\omega + B(\frac{d\omega}{dx})^2 + \\ + 2B'\omega(\frac{d\omega}{dx}) + C\omega^2 \} dx.$$

Quest' integrale sarà poi positivo o negativo, se la quantità sotto il segno integrale sarà positiva o negativa per tutti i valori possibili di x , compresi tra i limiti dell' integrale $x = a$, $x = b$.

Le condizioni perchè quella quantità sia positiva o negativa indipendentemente dai valori di ω ,

$(\frac{d\omega}{dx})$, $(\frac{d^2\omega}{dx^2})$ si hanno dalla ordinaria teoria dei massimi o dei minimi; ponendo $L = B - \frac{A'^2}{A}$; $L' = B' -$

$\frac{A'A''}{A}$; $M = C - \frac{A''^2}{A}$; $X = M - \frac{L'^2}{L}$, la indicata teoria

ci darà $A > 0$, $L > 0$, $X > 0$, per le condizioni che stabiliscono l'essere positiva quella quantità sotto il segno integrale; e le inverse per l'essere negativa.

Se dunque sarà $S > 0$, ovvero $(\frac{d^2\Psi}{dq^2}) > 0$, avre-

mo il minimo, purchè nello stesso tempo possano aver luogo le altre due condizioni $L > 0$, $X > 0$. Vi sarà poi il massimo se $S < 0$, purchè possano nello stesso tempo aver luogo anche le altre due condizioni $L < 0$, $X < 0$.

Nulla abbiain detto sin qui sopra la determinazione delle quantità α , β , γ ; ebbene; dovranno queste determinarsi in tal modo che si adempiano le condizioni da unirsi a quella dataci da S .

Se poi si volesse che dalla sola S ci fosse dato il criterio per distinguere il massimo dal minimo, allora dovremmo determinare α , β , γ in tal guisa che

fosse $L = 0$, $X = 0$. Essendo $X = M - \frac{L^2}{L}$, sarà

$M L - L^2 = 0$, quindi $L' = 0$. Le due equazioni adunque saranno

$$\left\{ Q - \alpha \beta - \left(\frac{d\gamma}{dx} \right) \right\} S - (R - \gamma)^2 = 0,$$

$$\left\{ N - \alpha - \left(\frac{d\beta}{dx} \right) \right\} S - (R - \gamma)(P - \beta) = 0.$$

Ove si vede che tre essendo le indeterminate, e due le equazioni, resta sempre un' indeterminata al nostro arbitrio, la quale ci potrà facilitare di molto i calcoli.

Quelle condizioni poi debbono verificarsi per tutta l'estensione dell'integrale, cioè per tutti i valori da $x = b$ ad $x = a$. E qui conviene pure osservare che nessuna delle quantità M , N , P , Q , R , S , α , β , γ divenga infinita per alcuno di quei valori di x .

Rapporto alla quantità $\alpha \omega^2 + 2 \omega \left(\frac{d \omega}{d x} \right) \beta - \gamma \left(\frac{d \omega}{d x} \right)^2$

se noi la rappresenteremo per (A) al principio dell'integrale, e per (B) alla fine, dovremo avere $(B) - (A) = 0$ pel massimo e pel minimo, ovvero del medesimo segno di S . A queste condizioni potremo sempre soddisfare e per mezzo dei dati del problema nei limiti dell'integrale, e per mezzo dell'indeterminazione che resta nei valori di α, β, γ .

E di qui senza progredire più oltre, scorgesi come ci dovremmo regolare se la funzione Ψ contenesse anche i coefficienti differenziali del terzo ordine

$\left(\frac{d^3 y}{d x^3} \right)$ e dei superiori.

§ 4. Veniamo alle formole integrali doppie.

Dal Teorema, che noi abbiamo riportato al § 1, dedurre si può quest'altro.

„ L'integrale doppio $\iint F(x, y) dx dy$, (nei
 „ limiti del quale y è una funzione di x) esteso rap-
 „ porto ad y da $y = \alpha = \varphi(x)$ ad $y = \beta = \varphi'(x)$,
 „ e rapporto ad x da $x = a$ ad $x = b$, è sempre una
 „ quantità positiva, se $F(x, y)$ è positiva per tut-
 „ ti i valori di y da $y = \varphi(x) = \alpha$ ad $y = \varphi'(x) = \beta$,
 „ posto $\beta > \alpha$, dando ad x tutti i valori possibili da
 „ $x = a$ ad $x = b$.

Sia in fatti $\int F(x, y) dy = f(x, y)$: si sa pel teorema citato che sarà $f(x, \varphi'(x)) - f(x, \varphi(x))$ una quantità positiva se tale sarà $F(x, y)$ per tutti i valori di y da $y = \varphi(x)$, sino ad $y = \varphi'(x)$ considerando x come un valore fisso e costante. Sia

$\Psi x = f(x, \phi' x) - f(x, \phi x)$, ed avremo

$$\int dx \int F(x, y) dy = \int \Psi x . dx$$

Rappresentando quest' ultimo integrale per Γx , si sa egualmente che sarà $\Gamma b - \Gamma a$ una quantità positiva se Ψx è tale per tutti i valori possibili da $x=a$ sino ad $x=b$. Ma Ψx ovvero $f(x, \phi' x) - f(x, \phi x)$ è positivo per tutti quei valori di x se per ciascuno di essi è positivo $F(x, y)$ dando ad y tutti i valori possibili da $y = \phi x$ sino ad $y = \phi' x$; dunque $\Gamma b - \Gamma a$ sarà una quantità positiva se $F(x, y)$ sarà sempre tale per tutti i valori che si ponno dare ad x da $x=a$ sino ad $x=b$, e per tutti i valori simultanei, che si ponno dare ad y da $y = \phi x$ sino ad $y = \phi' x$, di modo che ad ogni valore di x corrisponde un numero infinito di valori per y .

Così fatto $x = m$, se i due valori estremi della y sono $y = M, y = M'$, debbe $F(x, y)$ essere una quantità positiva per tutti i valori di y da $y = M$ sino ad $y = M'$.

Oltre questa condizione, la quale stabilisce quando $\Gamma b - \Gamma a$ è una quantità positiva, conviene aggiungere quest' altra, che nessuno dei differenziali parziali di qualunque ordine di $F(x, y)$ divenga infinito per qualunque di quei valori particolari di x e di y .

Onde il valore di quest' integrale doppio fosse negativo, dovrebbero essere tali tutti i valori di $F(x, y)$.

§ 5. Rappresentando per Ψ una qualunque funzione di x, y, z , si cerca la relazione che esser debbe tra queste tre variabili, onde l' integrale doppio

$\iint \Psi dx dy$ esteso tra i limiti $x = a, x = b, y = \phi x, y = \phi' x$, divenga massimo o minimo, ed i criterj per distinguere il massimo dal minimo.

Supponiamo che z divenga $z \pm i\omega$ essendo ω una qualunque funzione indeterminata di x, y ; ed i una costante, cui si può dare un valore quanto si vuol piccolissimo.

Per questa supposizione la nostra formola diverrà

$$\iint \Psi dx dy \pm i \iint \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)_{\omega} dx dy + \frac{i^2}{2} \iint \left(\frac{d^2\Psi}{dz^2} \right)_{\omega^2} dx dy \pm cc.$$

Onde dunque siavi il massimo od il minimo dovrà essere

$$\iint \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)_{\omega} dx dy = 0.$$

Quest'equazione ci dà subito $\left(\frac{d\Psi}{dz} \right) = 0$, che conter-

rà la relazione cercata tra z, x, y , onde quell'integrale doppio sia massimo o minimo. Sarà poi mini-

mo se la quantità $\iint \omega^2 \left(\frac{d^2\Psi}{dz^2} \right) dx dy$ sarà positiva;

massimo se negativa: ora ω^2 essendo sempre positivo, quest'integrale doppio esteso tra quei limiti sarà po-

sitivo o negativo se lo sarà il coefficiente $\left(\frac{d^2\Psi}{dz^2} \right)$ per

tutti i valori possibili da $y = \phi x$ ad $y = \phi' x$, combinati con tutti i possibili da $x = a$, ad $x = b$; dunque il proposto integrale $\iint \Psi dx dy$ esteso tra quei prescritti limiti, avrà un massimo o minimo valore se tra x, y, z vi sarà la relazione dataci dall'equa-

zione $(\frac{d\Psi}{dz}) = 0$; e sarà minimo se ridotta la quantità $(\frac{d^2\Psi}{dz^2})$ a non essere che una funzione di x, y per mezzo della sostituzione di z dato per x, y sarà essa $(\frac{d^2\Psi}{dz^2})$ sempre positiva per tutti i valori da $y = \phi x$ ad $y = \phi' x$, combinati con quei di x da $x = a$ sino ad $x = b$; sarà poi massimo per tutta la suddetta estensione se la quantità $(\frac{d^2\Psi}{dz^2})$ avrà un valore negativo.

A questa condizione aggiugniamo che per alcuno di quei valori della y e della x non debbe la quantità $(\frac{d^2\Psi}{dz^2})$ essere infinita; e questa avvertenza intendiamo che si abbia ancora in tutti i criterj, i quali daremo nel seguito per quanto non ne faremo più parola.

Se dando ad x e ad y tutti i valori che essi ponno ricevere entro i prescritti limiti, i valori di $(\frac{d^2\Psi}{dz^2})$ dall'esser positivi passeranno all'esser negativi, e viceversa, allora in quella porzione di superficie da noi cercata, avrà luogo ed il massimo ed il minimo: vi sarà il massimo per la porzione di superficie per cui i valori di $(\frac{d^2\Psi}{dz^2})$ sono negativi, ed il minimo, quando quei valori sono positivi.

Si dimandi per esempio l'equazione della superficie curva per la quale la formola

$$m^2 \iint \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x y z} dx dy \text{ è un massimo o un mini-}$$

mo, supponendo che la superficie passi per un contorno disegnato nello spazio, e che quella proprietà debba regnare per tutta l'estensione della superficie compresa tra quel contorno, che equivale a dire, che l'integrale debba estendersi tra i limiti $x = a$, $x = b$, $y = \phi x$, $y = \phi' x$ essendo questi dati dai massimi e minimi valori, che ricevono le coordinate x, y nella proiezione del contorno sul piano di quelle stesse coordinate.

Sarà in questo caso (tralasciando m^2 che restituiremo alla fine)

$$\Psi = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x y z}, \left(\frac{d\Psi}{dz} \right) = \frac{z^2 - x^2 - y^2}{x y z^2}, \left(\frac{d^2\Psi}{dz^2} \right) = \frac{2(x^2 + y^2)}{x y z^3}.$$

Ora l'equazione che ci dà la cercata relazione è

$\left(\frac{d\Psi}{dz} \right) = 0$; avremo perciò nel nostro caso $z^2 - x^2 - y^2 = 0$, ovvero $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. La superficie che gode di questa proprietà è dunque una superficie conica, il cui vertice è nell'origine delle coordinate; il cui asse è lo stesso asse degli z ; ed il cui lato fa un angolo di 45 gradi con l'asse.

Siccome nell'equazione trovata non vi sono arbitrarie, così non la possiamo assoggettare a passare per un dato contorno nello spazio, quando questo non sia tale, che le equazioni da cui è determinato abbia-

no necessariamente luogo insieme con l'equazione della superficie; così se quel contorno p. e. fosse un circolo parallelo al piano degli x, y , di un raggio uguale alla sua distanza dal piano orizzontale, allora la superficie conica estesa quanto bisogna passerà per quel circolo.

Supponiamo che non sia prescritto il passaggio della superficie per quel contorno, ma sia data la di lui proiezione sul piano degli x, y ; siano dati cioè i limiti tra i quali estender si debbe l'integrale; allora la porzione della superficie conica la quale gode della voluta proprietà sarà quella, che sarebbe intercettata da una superficie cilindrica, il cui asse fosse parallelo a quello degli z , e la cui base fosse la stessa proiezione.

Il criterio onde distinguere il massimo dal minimo consiste nell'esaminare se la quantità $(\frac{d^2 \Psi}{dz^2})$ è positiva o negativa tra i limiti dell'integrale.

Ora $(\frac{d^2 \Psi}{dz^2}) = \frac{2}{xy \sqrt{(x^2 + y^2)}}$. Se dunque suppo-

niamo che la proiezione sul piano degli x, y sia un triangolo rettangolo che abbia un angolo acuto nell'origine delle coordinate, un lato sopra l'asse degli x , la cui lunghezza sia b , e la tangente di quell'angolo eguale ad a , saranno $y = 0, y = ax$ i limiti relativamente ad y , ed $x = 0, x = b$ quei relativamente ad x . Ma quel criterio è sempre positivo per tutti i valori di y compresi tra $y = 0$, ed $y = ax$, dan-

do ad x un valor qualunque tra $x=0$ sino ad $x=b$, dunque quella superficie gode di una proprietà di minimo.

Se poi noi sostituiamo in quell'integrale doppio il valore di z dato per x e per y , cioè $z=\sqrt{(x^2+y^2)}$, avremo la quantità

$$\iint \frac{2m^2 \sqrt{(x^2+y^2)}}{xy} dx dy \text{ la quale integrata, ed este-}$$

se le integrazioni tra quei prescritti limiti, sarà un minimo.

In generale il criterio essendo sempre una quantità positiva, qualunque valori diamo ad x e ad y , purchè sieno ambi positivi o ambi negativi, ne segue che qualunque porzione di quella superficie conica godrà di quella proprietà di minimo, se pel contorno della di lei proiezione sul piano degli x, y , queste coordinate saranno positive nello stesso tempo, o nello stesso negative. Quando poi la porzione della superficie conica sarà tale che delle coordinate del contorno della sua proiezione una sarà positiva e l'altra negativa, allora essa godrà della proprietà del massimo.

§ 6. Sia Ψ una funzione di x, y, z , e $(\frac{dz}{dx})=p$,

e vogliasi la relazione tra x, y, z onde $\iint \Psi dx dy$ esteso tra i limiti come è detto sopra, sia massimo o minimo, ed i criterj per distinguere il massimo dal minimo.

Se noi poniamo $z \pm i\omega$ in vece di z la nostra formola diverrà

$$\begin{aligned} & \iint \Psi \, dx \, dy \pm i \iint \left\{ \omega \left(\frac{d\Psi}{dz} \right) + \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d\Psi}{dp} \right) \right\} dx \, dy + \\ & + \frac{i^2}{2} \iint \left\{ \omega^2 \left(\frac{d^2\Psi}{dz^2} \right) + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d^2\Psi}{dz \, dp} \right) + \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 \left(\frac{d^2\Psi}{dp^2} \right) \right\} dx \, dy \pm \\ & \pm \frac{i^3}{2.3} \iint \left\{ \text{ec.} \right\} + \text{ec.} \end{aligned}$$

Dovrà dunque essere

$$\iint \left\{ \omega \left(\frac{d\Psi}{dz} \right) + \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d\Psi}{dp} \right) \right\} dx \, dy = 0$$

tra quei limiti; e tra quei medesimi l'integrale doppio

$$\iint \left\{ \omega^2 \left(\frac{d^2\Psi}{dz^2} \right) + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d^2\Psi}{dz \, dp} \right) + \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 \left(\frac{d^2\Psi}{dp^2} \right) \right\} dx \, dy$$

dovrà essere negativo nel massimo e positivo nel minimo.

Ora

$$\begin{aligned} & \iint \left\{ \omega \left(\frac{d\Psi}{dz} \right) + \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d\Psi}{dp} \right) \right\} dx \, dy = \\ & \iint \left\{ \omega \left(\frac{d\Psi}{dz} \right) - \omega \cdot \frac{1}{dx} d \left(\frac{d\Psi}{dp} \right) \right\} dx \, dy + \int \omega \left(\frac{d\Psi}{dp} \right) dy, \end{aligned}$$

dunque

$$\left(\frac{d\Psi}{dz} \right) - \frac{1}{dx} d \left(\frac{d\Psi}{dp} \right) = 0$$

sarà l'equazione che ci determinerà la relazione cercata tra le variabili x , y , z .

L'integrale poi $\int \omega \left(\frac{d\Psi}{dp} \right) dy$, (il quale dee ri-

T. II. P. II.

guardarsi come una funzione di x, y , giacchè vi dobbiamo sostituire il valore di z dato per x, y) esteso tra i limiti prescritti, debbe esser nullo ancora esso indipendentemente dal valore di ω ; ciò che otterremo per mezzo delle indeterminate contenute nel valore di z , avendo però prima riguardo alle condizioni particolari del problema nei limiti dell'integrale.

Per l'altra condizione sia $\int \omega^2 z \, dy$ la quantità che può ottenersi facendo un'integrazione riguardo ad x , ed avremo, indicando per P, Q, R le quantità

$$\left(\frac{d^2 \Psi}{dz^2} \right), \quad \left(\frac{d^2 \Psi}{dz \, dp} \right), \quad \left(\frac{d^2 \Psi}{dp^2} \right),$$

$$\iint \left\{ \omega^2 P + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dx} \right) Q + \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 R \right\} dx \, dy = \int \omega^2 z \, dy + \\ + \iint \left\{ \omega^2 \left[P - \left(\frac{dz}{dx} \right) \right] + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dx} \right) (Q - z) + \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 R \right\} dx \, dy.$$

Ora l'ordinaria teoria dei massimi e minimi c'insegna che la quantità

$$R \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dx} \right) (Q - z) + \omega^2 \left[P - \left(\frac{dz}{dx} \right) \right]$$

è positiva o negativa se positive o negative sono le quantità $R, P - \left(\frac{dz}{dx} \right) - \frac{(Q - z)^2}{R}$; dunque vi sarà il massimo se $R < 0$;

$P - \left(\frac{dz}{dx} \right) - \frac{(Q - z)^2}{R} < 0$; ed il minimo se

$$R > 0; \quad P - \left(\frac{dz}{dx} \right) - \frac{(Q - z)^2}{R} > 0.$$

Il massimo ed il minimo sarà indicato dal coefficiente $(\frac{d^2 \Psi}{d p^2})$, e la quantità z dovrà determinarsi in

modo che la seconda condizione combini con la prima nello stabilire il massimo od il minimo.

Queste due condizioni debbono aver luogo per tutti i valori possibili delle variabili x, y compresi tra i limiti ad esse assegnati dal problema.

Potrebbe anche determinarsi z onde fosse

$$P - \left(\frac{d z}{d x} \right) - \frac{(Q - z)^2}{R} = 0.$$

ed allora il solo criterio $R > 0$, ovvero $R < 0$ ci distinguerà il massimo dal minimo.

A riguardo della quantità $\int \omega^2 z d y$, quest' integrale esteso tra i limiti prescritti dovrà indipendentemente dal valore di ω essere nullo, ovvero negativo nel massimo, e positivo nel minimo, ciò che succederà se sarà z una quantità negativa, o positiva per tutti i valori possibili di y tra i suoi limiti. Anzi indicando per $(z \omega^2)^i - (z \omega^2)^o$ quella funzione di y che nasce dall' estendere l' integrale $\omega^2 z$ da un limite all' altro dei valori di x dato per y , se avvi il minimo, dovrà $\int \{ (z \omega^2)^i - (z \omega^2)^o \} d y$ esser nullo, o una quantità positiva, estendendo l' integrale da un limite all' altro della y ; questo avverrà se $(z \omega^2)^i - (z \omega^2)^o = 0$, ovvero una quantità positiva per tutti i valori di y presi tra i suoi limiti: quando poi vi fosse il massimo dovrà essere $(z \omega^2)^i - (z \omega^2)^o = 0$, ovvero una quantità negativa.

Questa condizione debbe verificarsi indipendentemente dal valore di ω , avendo però riguardo ai dati nei limiti dell'integrale.

Per es. Sia $\Psi = \sqrt{(1 + p^2)}$, ed avremo

$$\left(\frac{d\Psi}{dz}\right) = 0, \left(\frac{d\Psi}{dp}\right) = \frac{p}{\sqrt{(1 + p^2)}},$$

$$\frac{1}{dx} d\left(\frac{d\Psi}{dp}\right) = \frac{q}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

e la cercata relazione sarà $q = 0$, ovvero $\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = 0$,

dalla quale si ricava $z = x f(y) + f'(y)$ essendo f, f' due funzioni arbitrarie di y . Si ha poi

$$\int \omega \left(\frac{d\Psi}{dp}\right) dy = \int \omega \frac{f(y) dy}{\sqrt{\{1 + f(y)^2\}}}, \text{ il quale integrale}$$

debb' essere nullo esteso tra i suoi limiti. Supponiamo che il contorno per cui passar debbe la superficie sia dato nello spazio, allora i valori di ω saranno in esso nulli; quindi quell'integrale si annullerà effettivamente.

I criterj poi per distinguere il massimo dal minimo sono dati dalle quantità

$$R, P - \left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{(Q - z)^2}{R} \text{ determinando } z \text{ in tal mo-}$$

do che quest'ultima espressione si annulli o divenga del medesimo segno di R . Ora $P = 0, Q = 0$,

$$R = \frac{1}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ dunque quelle quantità diverranno}$$

$$\frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}, -\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) - \alpha^2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}:$$

la prima essendo positiva noi avremo il minimo, e determineremo α onde sia

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) + \alpha^2(1+p^2)^{\frac{3}{2}} = 0, \text{ la quale dà}$$

$$\alpha = \frac{1}{\int (1+p^2)^{\frac{3}{2}} dx},$$

$$\alpha = \frac{1}{\int (1+f(y)^2)^{\frac{3}{2}} dx} = \frac{1}{\{1+f(y)^2\}^{\frac{3}{2}}(x+C)},$$

dove C è la costante arbitraria che porta l'integrazione, e che può esser funzione di y .

Finalmente l'integrale $\int \omega^2 \alpha dx$, cioè

$$\int \omega^2 \frac{dy}{\{1+f(y)^2\}^{\frac{3}{2}}(x+C)}$$

debbe essere nullo, o negativo nel massimo e positivo nel minimo. Egli è nullo perchè $\omega^2 = 0$ nei limiti dell'integrale.

§ 7. Se la funzione Ψ conterrà oltre le quantità

indicate nel § ant. anche $\left(\frac{dz}{dy}\right) = p'$, allora facendo

$$N = \left(\frac{d\Psi}{dz}\right), \quad P = \left(\frac{d\Psi}{dp}\right), \quad P' = \left(\frac{d\Psi}{dp'}\right),$$

la relazione tra le variabili, la quale porta il massimo o minimo della formola $\iint \Psi dx dy$, sarà

$$\left. \begin{aligned} N - \frac{1}{dx} dP \\ - \frac{1}{dy} dP' \end{aligned} \right\} = 0.$$

Dovrà poi la quantità $\int \omega P dy + \int \omega P' dx$ esser nulla tra i limiti delle variabili x, y indipendentemente dal valore di ω .

Inoltre vi sarà il massimo od il minimo se la quantità

$$\begin{aligned} \iint \left\{ \omega^2 \left(\frac{d^2 \Psi}{dz^2} \right) + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d^2 \Psi}{dz dp} \right) + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \left(\frac{d^2 \Psi}{dz dp'} \right) + \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 \left(\frac{d^2 \Psi}{dp^2} \right) + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \left(\frac{d^2 \Psi}{dp dp'} \right) + \left(\frac{d\omega}{dy} \right)^2 \left(\frac{d^2 \Psi}{dp'^2} \right) \right\} dx dy \end{aligned}$$

è negativa o positiva, estendendo l'integrale tra i limiti prescritti.

Ora io osservo che dalla quantità $\int \omega^2 \alpha dx + \int \omega^2 \beta dy$ (differenziando la prima parte rapporto ad y , e la seconda rapporto ad x) si ha

$$\begin{aligned} \int \omega^2 \alpha dx + \int \omega^2 \beta dy = \iint \left\{ \omega^2 \left(\frac{d\alpha}{dy} \right) + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \alpha + \omega^2 \left(\frac{d\beta}{dx} \right) + \right. \\ \left. + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \beta \right\} dx dy; \end{aligned}$$

dunque indicando per Q, R , ec. quei coefficienti differenziali $\left(\frac{d^2 \Psi}{dz^2} \right), \left(\frac{d^2 \Psi}{dz dp} \right)$, ec., e supponendo che

$\int \omega^2 \alpha dx + \int \omega^2 \beta dy$ sieno le due quantità, che ponno aversi scevre di un segno integrale, sarà

$$\begin{aligned}
 \iint \left\{ \omega^2 Q + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dx} \right) R + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dy} \right) S + \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 T + 2 \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d\omega}{dy} \right) V + \right. \\
 \left. + \left(\frac{d\omega}{dy} \right)^2 Y \right\} dx dy = \int \alpha \omega^2 dx + \int \beta \omega^2 dy + \iint \left\{ \omega^2 \left[Q - \left(\frac{d\alpha}{dy} \right) - \left(\frac{d\beta}{dx} \right) \right] + \right. \\
 \left. + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dx} \right) (R - \beta) + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dy} \right) (S - \alpha) + \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 T + 2 \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d\omega}{dy} \right) V + \right. \\
 \left. + \left(\frac{d\omega}{dy} \right)^2 Y \right\} dx dy.
 \end{aligned}$$

A questo integrale doppio del secondo membro diamo la forma seguente

$$\begin{aligned}
 \iint \left\{ A \left(\frac{d\omega}{dy} \right)^2 + 2A' \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \left(\frac{d\omega}{dx} \right) + 2A'' \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \omega + B \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 + \right. \\
 \left. + 2B' \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \omega + C \omega^2 \right\} dx dy,
 \end{aligned}$$

e l'ordinaria teoria dei massimi e dei minimi ci dirà che quel coefficiente di $dx dy$ è positivo indipendentemente dai valori di ω , $\left(\frac{d\omega}{dx} \right)$, $\left(\frac{d\omega}{dy} \right)$, se fatte

$$L = B - \frac{A'^2}{A}, \quad L' = B' - \frac{A' A''}{A}, \quad M = C - \frac{A''^2}{A},$$

$$H = M - \frac{L'^2}{L}; \quad \text{sarà } A > 0; \quad L > 0, \quad H > 0.$$

Dunque quell'integrale doppio esteso tra i prescritti limiti sarà positivo se $A > 0$, $L > 0$, $H > 0$; cioè se

$$Y > 0; \quad T - \frac{V^2}{Y} > 0;$$

$$Q - \left(\frac{dz}{dy}\right) - \left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{(S-z)^2}{Y} - \frac{\left\{R - \beta - \frac{V(S-z)^2}{Y}\right\}}{T - \frac{V^2}{Y}} > 0;$$

sarà poi negativo se tutte quelle tre quantità saranno negative per tutti i valori dell' x , e dell' y compresi tra quei limiti. Il massimo dunque o il minimo ci sarà dato dall'essere

$$\left(\frac{d^2\Psi}{dp'^2}\right), \left(\frac{d^2\Psi}{dp^2}\right) - \left(\frac{d^2\Psi}{dp dp'}\right)^2 : \left(\frac{d^2\Psi}{dp'^2}\right)$$

quantità negative o positive. Dovremo poi prendere per z , β tali funzioni di x , y , che compiano l'altra condizione $H > 0$; o che rendano $H = 0$. Una pertanto delle due indeterminate resterà arbitraria.

La quantità $\int \omega^2 z dx + \int \omega^2 \beta dy$ estesa tra i prescritti limiti dovrà in oltre esser positiva nel minimo, negativa nel massimo, indipendentemente dal valore di ω , ovvero nulla nei due casi.

Prendiamo a determinare la superficie per cui la quantità

$$\iint \left\{ \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 - a^2 \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \right\} dx dy$$

è un massimo o un minimo.

Avremo in questo caso $\Psi = \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 - a^2 \left(\frac{dz}{dx}\right)^2$, e

quindi $\left(\frac{d\Psi}{dy}\right) = 0$, $\left(\frac{d\Psi}{dp}\right) = -2a^2 p$, $\left(\frac{d\Psi}{dp'}\right) = 2p'$; avre-

mo adunque per determinare il massimo, o minimo queste due equazioni

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = a^2 \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right),$$

$$\int 2 w \left(\frac{d z}{d y}\right) d x - \int 2 a^2 w \left(\frac{d z}{d x}\right) d y = 0.$$

L'integrale della prima è $z = \phi(x + a y) + F(x - a y)$, essendo ϕ , F due funzioni arbitrarie: tale sarà l'equazione della superficie cercata.

Supponiamo che questa superficie debba passare per un contorno ovale condotto nello spazio, le cui equazioni siano $y = m x + n$, $z = \sqrt{(r^2 - x^2)}$. Converrà determinare queste funzioni onde sia compita quella condizione e ci basterà la determinazione di una sola. Determinata opportunamente la prima funzione si avrà

$$z = \sqrt{\{M + N(x + a y) + L(x + a y)^2\} + F(x - a y)}$$

essendo

$$M = \frac{r^2(1 + a m)^2 - a^2 n^2}{(1 + a m)^2},$$

$$N = \frac{2 a n}{(1 + a m)^2},$$

$$L = \frac{-1}{(1 + a m)^2}.$$

Considerando il contorno per cui passar debbe la superficie, vedremo che i limiti tra i quali estender si debbe quel doppio integrale sono

T. II. P. II.

$$y = m x + n, \quad x = -r, \quad x = +r.$$

Esaminiamo ora il criterio del massimo e del minimo.

$$\text{Siccome } \left(\frac{d^2 \Psi}{d p'^2} \right) = 2, \quad \left(\frac{d^2 \Psi}{d p^2} \right) = -2 a^2,$$

$$\left(\frac{d^2 \Psi}{d p d p'} \right) = 0, \text{ si avrà}$$

$$\left(\frac{d^2 \Psi}{d p'^2} \right) = 2;$$

$$\left(\frac{d^2 \Psi}{d p^2} \right) - \frac{\left(\frac{d^2 \Psi}{d p d p'} \right)}{\left(\frac{d^2 \Psi}{d p'^2} \right)} = -2 a^2,$$

qualunque valore si dia ad x ; dunque di queste due quantità una essendo positiva, l'altra negativa, non saranno adempite le condizioni del massimo nè del minimo; non vi sarà dunque nè massimo, nè minimo in quella superficie.

Che la cosa debba essere in questa guisa si rileverà ancora dall'osservare che quella relazione tra le variabili, dà $\Psi = 0$, quindi

$$\iint \Psi dx dy = \iint 0 dx dy = \int dx \int 0 dy = A x = 0,$$

se estenderemo l'integrale tra quei limiti $x = -r$, $x = r$.

Di tutte le superficie curve, le quali si terminano ad uno stesso contorno disegnato nello spazio, e dato di posizione, trovare quella della minima estensione.

L' integrale doppio

$$\iint \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \right\}} dx dy$$

ci esprime l'estensione di qualunque porzione di superficie, quando estendasi tra i limiti che si conven-
gono a quella porzione: avremo dunque

$$\Psi = \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right\}}. \text{ Facciamo}$$

$$p = \left(\frac{dz}{dx} \right), p' = \left(\frac{dz}{dy} \right), q = \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right), q' = \left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right),$$

$$r = \left(\frac{d^2 z}{dx dy} \right), \text{ ed avremo}$$

$$\Psi = \sqrt{(1 + p^2 + p'^2)}, N = \left(\frac{d\Psi}{dz} \right) = 0$$

$$P = \left(\frac{d\Psi}{dp} \right) = \frac{p}{\sqrt{(1 + p^2 + p'^2)}},$$

$$P' = \left(\frac{d\Psi}{dp'} \right) = \frac{p'}{\sqrt{(1 + p^2 + p'^2)}},$$

e l' equazione della ricercata superficie sarà

$$q(1 + p'^2) + q'(1 + p^2) - 2pp'r = 0, \text{ ovvero}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right) \left\{ 1 + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \right\} + \left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right) \left\{ 1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right\} - \\ & - 2 \left(\frac{dz}{dx} \right) \left(\frac{dz}{dy} \right) \left(\frac{d^2 z}{dx dy} \right) = 0 \end{aligned}$$

equazione a differenziali parziali del secondo ordine.

Per l'integrale di questa equazione si veda il § 258. Tom. III del Corso mio.

Ad una sì fatta equazione differenziale parziale soddisfa l'equazione di un piano $z = A + Bx + Cy$, essendo A, B, C le costanti che determinano la posizione del piano, e cui dobbiamo dare tali valori, che facciano passare questo piano pel contorno dato nello spazio, contorno che debbe essere ancora esso tutto in un piano.

I criterj poi per distinguere il massimo dal minimo ci dicono che il piano è una superficie della minima estensione.

A quella equazione della massima o della minima superficie soddisfa $z = A e^{x(x+y\sqrt{-1})}$ essendo A ed z due costanti arbitrarie.

§ 3. Sia ora Ψ una funzione di x, y, z ,

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p, \left(\frac{dz}{dy}\right) = p', \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = q, \left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) = q', \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = q'',$$

e cerchisi la relazione tra x, y, z , onde $\iint \Psi dx dy$ sia un massimo o un minimo, ed il criterio che distingue il massimo dal minimo.

Se noi facciamo $\left(\frac{d\Psi}{dz}\right) = N, \left(\frac{d\Psi}{dp}\right) = P, \left(\frac{d\Psi}{dp'}\right) = P', \left(\frac{d\Psi}{dq}\right) = Q, \left(\frac{d\Psi}{dq'}\right) = Q', \left(\frac{d\Psi}{dq''}\right) = Q''$, la relazione cercata sarà data dall'equazione

$$\left. \begin{aligned} N - \frac{1}{dx} dP + \frac{1}{dx^2} d^2Q \\ - \frac{1}{dx} dP' + \frac{1}{dx dy} d^2Q' \\ + \frac{1}{dy^2} d^2Q'' \end{aligned} \right\} = 0$$

Dovrà poi la quantità

$$\begin{aligned} & \int \left\{ \omega P + \left(\frac{d\omega}{dx} \right) Q + \left(\frac{d\omega}{dy} \right) Q' - \omega \left(\frac{dQ}{dx} \right) \right\} dy + \\ & + \int \left\{ \omega P' + Q'' \left(\frac{d\omega}{dy} \right) - \omega \left(\frac{dQ''}{dy} \right) - \omega \left(\frac{dQ'}{dx} \right) \right\} dx \end{aligned}$$

esser nulla tra i limiti delle variabili x , y indipendentemente dal valore di ω e dei suoi differenziali, avuto riguardo alle condizioni del problema nei limiti dell' integrale.

Il criterio poi per distinguere il massimo dal minimo si desumerà dall' essere il seguente integrale doppio una quantità negativa, o positiva,

$$\iint \left\{ \omega^2 \left(\frac{a}{\alpha} \right) \right.$$

esteso tra i

Ora si
quantità

$$\left\{ \omega^2 \alpha + : \right.$$

$$\left\{ \omega^2 \alpha' + : \right.$$

d avremo

$$\begin{aligned}
 \iint \left\{ \omega^2 \left(\frac{d^2 \Psi}{dz^2} \right) + 2 \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \omega \left(\frac{d^2 \Psi}{dz dp} \right) + 2 \omega \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \left(\frac{d^2 \Psi}{dz dp'} \right) + 2 \omega \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 \Psi}{dz dq} \right) + 2 \omega \left(\frac{d^2 \omega}{dx dy} \right) \left(\frac{d^2 \Psi}{dz dq'} \right) + 2 \omega \left(\frac{d^2 \omega}{dy^2} \right) \left(\frac{d^2 \Psi}{dq'' dz} \right) \right. \\
 + \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 \left(\frac{d^2 \Psi}{dp^2} \right) + 2 \left(\frac{d\omega}{dz} \right) \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \left(\frac{d^2 \Psi}{dp dp'} \right) + 2 \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 \Psi}{dq dp} \right) + 2 \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d^2 \omega}{dx dy} \right) \left(\frac{d^2 \Psi}{dp dq'} \right) + 2 \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d^2 \omega}{dy^2} \right) \left(\frac{d^2 \Psi}{dp dq''} \right) \\
 + \left(\frac{d\omega}{dy} \right)^2 \left(\frac{d^2 \Psi}{p'^2} \right) + 2 \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 \Psi}{dp' dq} \right) + 2 \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \left(\frac{d^2 \omega}{dx dy} \right) \left(\frac{d^2 \Psi}{dp' dq'} \right) + 2 \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \left(\frac{d^2 \omega}{dy^2} \right) \left(\frac{d^2 \Psi}{dp' dq''} \right) \\
 + \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} \right)^2 \left(\frac{d^2 \Psi}{dq^2} \right) + 2 \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 \omega}{dx dy} \right) \left(\frac{d^2 \Psi}{dq dq'} \right) + 2 \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 \omega}{dy^2} \right) \left(\frac{d^2 \Psi}{dq dq''} \right) \\
 + \left(\frac{d^2 \omega}{dx dy} \right)^2 \left(\frac{d^2 \Psi}{dq'^2} \right) + 2 \left(\frac{d^2 \omega}{dx dy} \right) \left(\frac{d^2 \omega}{dy^2} \right) \left(\frac{d^2 \Psi}{dq' dq''} \right) \\
 \left. + \left(\frac{d^2 \omega}{dy^2} \right)^2 \left(\frac{d^2 \Psi}{dq''^2} \right) \right\} dx dy
 \end{aligned}$$

esteso tra i prescritti limiti dell' x e dell' y . Rappresentiamo questa quantità per (M) .

Ora supponiamo che facendo una delle due integrazioni possano levarsi di sotto al doppio segno sommatorio le due quantità

$$\int \left\{ \omega^2 \alpha + 2 \omega \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \beta + \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 \gamma + 2 \beta \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \right\} dy$$

$$\int \left\{ \omega^2 \alpha' + 2 \omega \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \beta' + \left(\frac{d\omega}{dy} \right)^2 \gamma' + 2 \beta' \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \right\} dx$$

ed avremo

)

(j

$$\begin{aligned}
 (M) = & \int \left\{ \omega^2 \alpha + 2 \omega \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \beta + \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 \gamma + 2 \delta \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \right\} dy + \int \left\{ \omega^2 \alpha' + 2 \omega \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \beta' + \left(\frac{d\omega}{dy} \right)^2 \gamma' + 2 \delta' \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \right\} dx \\
 & + \iint \left\{ \left(\frac{d^2 \omega}{dy^2} \right) A + 2 \left(\frac{d^2 \omega}{dy^2} \right) \left(\frac{d^2 \omega}{dx dy} \right) A' + 2 \left(\frac{d^2 \omega}{dy^2} \right) \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) A'' + 2 \left(\frac{d^2 \omega}{dy^2} \right) \left(\frac{d\omega}{dy} \right) A''' + 2 \left(\frac{d^2 \omega}{dy^2} \right) \left(\frac{d\omega}{dx} \right) A^{IV} + 2 \left(\frac{d^2 \omega}{dy^2} \right) \omega A^V \\
 & + \left(\frac{d^2 \omega}{dx dy} \right)^2 B + 2 \left(\frac{d^2 \omega}{dx dy} \right) \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) B' + 2 \left(\frac{d^2 \omega}{dx dy} \right) \left(\frac{d\omega}{dy} \right) B'' + 2 \left(\frac{d^2 \omega}{dx dy} \right) \left(\frac{d\omega}{dx} \right) B''' + 2 \left(\frac{d^2 \omega}{dx dy} \right) \omega B^{IV} \\
 & + \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} \right)^2 C + 2 \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) \left(\frac{d\omega}{dy} \right) C' + 2 \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) \left(\frac{d\omega}{dx} \right) C'' + 2 \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) \omega C''' \\
 & + \left(\frac{d\omega}{dy} \right)^2 D + 2 \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \left(\frac{d\omega}{dx} \right) D' + 2 \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \omega D'' \\
 & + \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 E + 2 \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \omega E' \\
 & + \omega^2 F \Big\} dx dy
 \end{aligned}$$

ove è facile vedere che i valori di quei coefficienti saranno come segue

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{d^2 \Psi}{dq'^2} \right); & A' &= \left(\frac{d^2 \Psi}{dq' dq''} \right); & A'' &= \left(\frac{d^2 \Psi}{dq dq''} \right); & A''' &= \left(\frac{d^2 \Psi}{dp' dq''} \right) - \gamma'; \\
 A^{IV} &= \left(\frac{d^2 \Psi}{dp dq''} \right) - \delta'; & A^V &= \left(\frac{d^2 \Psi}{dz dq''} \right) - \beta'; & B &= \left(\frac{d^2 \Psi}{dq'^2} \right); & B' &= \left(\frac{d^2 \Psi}{dq dq'} \right); \\
 B'' &= \left(\frac{d^2 \Psi}{dp' dq'} \right) - \delta'; & B''' &= \left(\frac{d^2 \Psi}{dp dq'} \right) - \beta; & B^{IV} &= \left(\frac{d^2 \Psi}{dz dq'} \right); & C &= \left(\frac{d^2 \Psi}{dq'^2} \right);
 \end{aligned}$$

$$C' = \left(\frac{d^2 \Psi}{d p' d q} \right) - \delta, \quad C'' = \left(\frac{d^2 \Psi}{d p d q} \right) - \gamma,$$

$$C''' = \left(\frac{d^2 \Psi}{d z d q} \right) - \beta, \quad D = \left(\frac{d^2 \Psi}{d p'^2} \right) - 2 \beta' \left(\frac{d \gamma'}{d y} \right),$$

$$D' = \left(\frac{d^2 \Psi}{d p d p'} \right) - \left(\frac{d \delta}{d x} \right) - \left(\frac{d \delta'}{d y} \right),$$

$$D'' = \left(\frac{d^2 \Psi}{d z d p'} \right) - \alpha' - \left(\frac{d \beta'}{d y} \right),$$

$$E = \left(\frac{d^2 \Psi}{d p^2} \right) - 2 \beta - \left(\frac{d \gamma}{d x} \right),$$

$$E' = \left(\frac{d^2 \Psi}{d z d p} \right) - \alpha - \left(\frac{d \beta}{d x} \right),$$

$$F = \left(\frac{d^2 \Psi}{d z^2} \right) - \left(\frac{d \alpha}{d x} \right) - \left(\frac{d \alpha'}{d y} \right).$$

Facciamo

$$(M) = \int G d y + \int H d x + \iint O d x d y$$

e questa quantità dovrà essere negativa nel massimo e positiva nel minimo.

Perchè l' integrale doppio $\iint O d x d y$ esteso tra i prescritti limiti sia positivo, o negativo, conviene che la quantità O sia essa medesima positiva o negativa per tutti quei valori di x, y compresi tra quei limiti stessi. Per l' altra quantità $\int G d y + \int H d x$ o debbe questa (estesa tra i limiti assegnati) essere nulla, o del medesimo segno di O . Onde la quantità O sia positiva indipendentemente dai valori di x e dei suoi differenziali parziali, si hanno le

condizioni della ordinaria teoria dei massimi e dei minimi.

Questa teoria ci dice che, supponendo

$$M=B-\frac{A'^2}{A}; M'=B'-\frac{A'A''}{A}; M''=B''-\frac{A'A'''}{A}; M'''=B'''-\frac{A'A'''}{A}; M''''=B''''-\frac{A'A'''}{A};$$

$$N=C-\frac{A''^2}{A}; N'=C'-\frac{A''A'''}{A}; N''=C''-\frac{A''A'''}{A}; N'''=C'''-\frac{A''A'''}{A};$$

$$L=D-\frac{A'''^2}{A}; L'=D'-\frac{A'''A'''}{A}; L''=D''-\frac{A'''A'''}{A};$$

$$H=E-\frac{A''^2}{A}; H'=E'-\frac{A''A'''}{A};$$

$$I=F-\frac{A''^2}{A};$$

$$K=N-\frac{M''}{M}; K'=N'-\frac{M'M''}{M}; K''=N''-\frac{M'M''}{M}; K'''=N'''-\frac{M'M''}{M};$$

$$P=L-\frac{M''^2}{M}; P'=L'-\frac{M''M'''}{M}; P''=L''-\frac{M''M'''}{M};$$

$$Q=H-\frac{M''^2}{M}; Q'=H'-\frac{M''M'''}{M};$$

$$R=I-\frac{M''^2}{M};$$

$$S=P-\frac{K'^2}{K}; S'=P'-\frac{K'K''}{K}; S''=P''-\frac{K'K''}{K};$$

$$T=Q-\frac{K''^2}{K}; T'=Q'-\frac{K''K'''}{K};$$

$$V=R-\frac{K''^2}{K};$$

$$X = T - \frac{S'^2}{S}; \quad X' = T' - \frac{S' S''}{S};$$

$$Z = V - \frac{S''^2}{S};$$

$$Y = Z - \frac{X'^2}{X};$$

sarà la quantità O positiva se tali lo saranno le quantità A, M, K, S, X, Y ; e negativa se quelle quantità saranno negative.

Avremo dunque il minimo se $A > 0, M > 0, K > 0, S > 0, X > 0, Y > 0$; ed il massimo se $A < 0, M < 0, K < 0, S < 0, X < 0, Y < 0$, per tutti i valori possibili che noi possiamo dare ad x, y compresi tra i limiti.

Le quantità poi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$ debbono determinarsi in modo che quelle condizioni, nelle quali esse s'incontrano, abbiano luogo, insieme con le condizioni indipendenti da esse.

Le tre quantità A, M, K non contengono alcuna di quelle indeterminate; così la loro determinazione non ha luogo che per soddisfare alle ultime tre condizioni, o per annullare quelle ultime tre quantità; il massimo adunque ed il minimo ci è sempre dato dalle tre prime condizioni.

E di qui si vede che potremmo estendere la ricerca anche al caso nel quale in Ψ si contenessero i differenziali parziali degli ordini superiori; ma i calcoli vengono così prolissi, che non mette il conto trattenervisi.

§ 9. Sia Ψ una funzione di x, y, z , $(\frac{dz}{dx}) = p$,
 $(\frac{dz}{dy}) = p'$, V , essendo V dato dall'equazione a dif-
 ferenziali parziali $(\frac{dV}{dx}) = \phi$, indicando per ϕ una

(6) funzione di x, y, z , $(\frac{dz}{dx}) = p$, $(\frac{dz}{dy}) = p'$, V , $(\frac{dV}{dy}) = q$:

si dimanda la relazione che esser debbe tra x, y, z ,
 onde $\iint \Psi dx dy$ sia massimo, o minimo, ed i cri-
 terj onde distinguere il massimo dal minimo. Sup-
 poniamo che quando z diviene $z + i\omega$, la quantità
 V divenga $V + i\theta$; e quando z diviene $z - i\omega$, V
 divenga $V - i\theta$.

Se noi indichiamo anche per $\Psi(z, p, p', V)$
 $\phi(z, p, p', V, q)$ le funzioni Ψ, ϕ , le due differenze

$$(e) \dots \iint \Psi \left\{ z + i\omega, p + i\left(\frac{d\omega}{dx}\right), p' + i\left(\frac{d\omega}{dy}\right), V + i\theta \right\} dx dy \\ - \iint \Psi(z, p, p', V) dx dy,$$

$$(e') \dots \iint \Psi \left\{ z - i\omega, p - i\left(\frac{d\omega}{dx}\right), p' - i\left(\frac{d\omega}{dy}\right), V - i\theta \right\} dx dy \\ - \iint \Psi(z, p, p', V) dx dy,$$

dovranno essere simultaneamente positive nel mini-
 mo e negative nel massimo.

Trattiamo per ora la prima di queste due diffe-
 renze, la (e).

Noi avremo

$$\begin{aligned}
 (e) = & + i \iint \left\{ \omega \left(\frac{d\Psi}{dz} \right) + \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d\Psi}{dp} \right) + \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \left(\frac{d\Psi}{dp'} \right) + \theta \left(\frac{d\Psi}{dV} \right) \right\} dx dy \\
 & + \frac{i^2}{2} \iint \left\{ \omega^2 \left(\frac{d^2\Psi}{dz^2} \right) + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d^2\Psi}{dz dp} \right) + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \left(\frac{d^2\Psi}{dz dp'} \right) + \right. \\
 & + 2\omega \theta \left(\frac{d^2\Psi}{dz dV} \right) + \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 \left(\frac{d^2\Psi}{dp^2} \right) + 2 \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \left(\frac{d^2\Psi}{dp dp'} \right) + \\
 & + 2 \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \theta \left(\frac{d^2\Psi}{dp dV} \right) + \left(\frac{d\omega}{dy} \right)^2 \left(\frac{d^2\Psi}{dp'^2} \right) + 2 \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \theta \left(\frac{d^2\Psi}{dp' dV} \right) + \\
 & \left. + \theta^2 \left(\frac{d^2\Psi}{dV^2} \right) \right\} dx dy \\
 & + \frac{i^3}{2.3} \iint \{ ec. \} + cc.
 \end{aligned}$$

La seconda si ridurrà ad una serie consimile nella quale i segni degli integrali doppi saranno alternativi, ed in tutta la serie sarà θ' invece di θ .

Ora facciamo

$$\begin{aligned}
 & \iint \left\{ \omega \left(\frac{d\Psi}{dz} \right) + \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d\Psi}{dp} \right) + \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \left(\frac{d\Psi}{dp'} \right) + \theta \left(\frac{d\Psi}{dV} \right) \right\} dx dy \\
 & = \int (z\theta + \beta\omega + \delta) dy + \int (z'\theta + \beta'\omega + \delta') dx,
 \end{aligned}$$

ed avremo

$$\begin{aligned}
 \omega \left(\frac{d\Psi}{dz} \right) + \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d\Psi}{dp} \right) + \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \left(\frac{d\Psi}{dp'} \right) + \theta \left(\frac{d\Psi}{dV} \right) = & z \left(\frac{d\theta}{dx} \right) + \theta \left(\frac{dz}{dx} \right) + \\
 + \omega \left(\frac{d\beta}{dx} \right) + \beta \left(\frac{d\omega}{dx} \right) + \left(\frac{d\delta}{dx} \right) + & z' \left(\frac{d\theta}{dy} \right) + \theta \left(\frac{dz'}{dy} \right) + \\
 + \omega \left(\frac{d\beta'}{dy} \right) + \beta' \left(\frac{d\omega}{dy} \right) + \left(\frac{d\delta'}{dy} \right); &
 \end{aligned}$$

Ma l'equazione

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = \Phi(z, p, p', V, q) \text{ ci dà}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\theta}{dx}\right) = & \omega\left(\frac{d\Phi}{dz}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\Phi}{dp}\right) + \left(\frac{d\omega}{dy}\right)\left(\frac{d\Phi}{dp'}\right) + \theta\left(\frac{d\Phi}{dV}\right) + \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right) + \\ & \frac{i}{2}\left\{\omega^2\left(\frac{d^2\Phi}{dz^2}\right) + 2\omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d^2\Phi}{dzdp}\right) + 2\omega\left(\frac{d\omega}{dy}\right)\left(\frac{d^2\Phi}{dp'dz}\right) + 2\omega\theta\left(\frac{d^2\Phi}{dzdV}\right) + \right. \\ & + 2\omega\left(\frac{d\theta}{dy}\right)\left(\frac{d^2\Phi}{dzdq}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2\Phi}{dp^2}\right) + 2\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right)\left(\frac{d^2\Phi}{dpdp'}\right) + \\ & + 2\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\theta\left(\frac{d^2\Phi}{dpdV}\right) + 2\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right)\left(\frac{d^2\Phi}{dpdq}\right) + \left(\frac{d\omega}{dy}\right)^2\left(\frac{d^2\Phi}{p'^2}\right) + \\ & + 2\left(\frac{d\omega}{dy}\right)\theta\left(\frac{d^2\Phi}{dp'dV}\right) + 2\left(\frac{d\omega}{dy}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right)\left(\frac{d^2\Phi}{dp'dq}\right) + \theta^2\left(\frac{d^2\Phi}{dV^2}\right) + \\ & \left. + 2\theta\left(\frac{d\theta}{dy}\right)\left(\frac{d^2\Phi}{dVdq}\right) + \left(\frac{d\theta}{dy}\right)^2\left(\frac{d^2\Phi}{dq^2}\right)\right\} \\ & + \text{cc.} \end{aligned}$$

Indicando dunque per (F) la quantità contenuta tra queste parentesi $\{ \}$, avremo

$$\begin{aligned} \omega\left(\frac{d\Psi}{dz}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\Psi}{dp}\right) + \left(\frac{d\omega}{dy}\right)\left(\frac{d\Psi}{dp'}\right) + \theta\left(\frac{d\Psi}{dV}\right) = & \left\{z\left(\frac{d\Phi}{dz}\right) + \left(\frac{d\beta}{dx}\right) + \right. \\ & + \left(\frac{d\beta'}{dy}\right)\left\}\omega + \left\{z\left(\frac{d\Phi}{dp'}\right) + \beta'\right\}\left(\frac{d\omega}{dy}\right) + \left\{\omega\left(\frac{d\Phi}{dV}\right) + \left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + \right. \\ & + \left(\frac{d\alpha'}{dy}\right)\left\}\theta + \left\{z\left(\frac{d\Phi}{dp}\right) + \beta\right\}\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \left\{\omega\left(\frac{d\Phi}{dq}\right) + \alpha'\right\}\left(\frac{d\theta}{dy}\right) + \\ & + \left(\frac{d\beta}{dx}\right) + \left(\frac{d\beta'}{dy}\right) + \frac{i}{2}\alpha(F). \end{aligned}$$

Da questa equazione si ricava

$$(1) \dots\dots\dots \left(\frac{d\Psi}{dz} \right) - \alpha \left(\frac{d\Phi}{dz} \right) - \left(\frac{d\beta}{dx} \right) - \left(\frac{d\beta'}{dy} \right) = 0,$$

$$(2) \dots\dots\dots \left(\frac{d\Psi}{dp} \right) - \alpha \left(\frac{d\Phi}{dp} \right) - \beta = 0,$$

$$(3) \dots\dots\dots \left(\frac{d\Psi}{dp'} \right) - \alpha \left(\frac{d\Phi}{dp'} \right) - \beta' = 0,$$

$$(4) \dots\dots\dots \left(\frac{d\Psi}{dV} \right) - \alpha \left(\frac{d\Phi}{dV} \right) - \left(\frac{d\alpha}{dx} \right) - \left(\frac{d\alpha'}{dy} \right) = 0,$$

$$(5) \dots\dots\dots \alpha \left(\frac{d\Phi}{dq} \right) + \alpha' = 0,$$

$$(6) \dots\dots\dots \left(\frac{d\delta}{dx} \right) + \left(\frac{d\delta'}{dy} \right) + \frac{i}{2} \alpha (F) = 0.$$

Dalle prime cinque equazioni eliminando $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, si ottiene una equazione, la quale ci darà la ricercata relazione tra le variabili x, y, z , ossia l'equazione della dimandata superficie curva. Si troveranno in seguito i valori di $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, ed avremo in fine la serie che esprime quella differenza (e).

§ 10. Indichiamo per $E, F, G, H, I, K, L,$

M, N, O , i coefficienti di $\omega^2, 2\omega \left(\frac{d\omega}{dx} \right)$, ec. nella pri-

ma serie trovata per (e); e per $E', F', G', H', I', K', L', M', N', O', P', Q', R', S', T'$ i simili coefficienti nella quantità (F) ed avremo

$$\begin{aligned}
(e) = & i \int \{ \alpha \theta + \beta \omega \} dy + i \int \{ \alpha' \theta + \beta' \omega \} dx \\
& + \frac{i^2}{2} \iint \left\{ \omega^2 (E - \alpha E') + 2 \omega \left(\frac{d\omega}{dx} \right) (F - \alpha F') + 2 \omega \left(\frac{d\omega}{dy} \right) (G - \alpha G') + \right. \\
& + 2 \omega \theta (H - \alpha H') - 2 \alpha \left(\frac{d\theta}{dy} \right) P' + \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 (I - \alpha I') + 2 \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d\omega}{dy} \right) (K - \alpha K') + \\
& + 2 \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \theta (L - \alpha L') - 2 \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d\theta}{dy} \right) \alpha Q' + \left(\frac{d\omega}{dy} \right)^2 (M - \alpha M') + \\
& + 2 \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \theta (N - \alpha N') - 2 \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \left(\frac{d\theta}{dy} \right) \alpha R' + \theta^2 (O - \alpha O') - 2 \theta \left(\frac{d\theta}{dy} \right) \alpha S' - \\
& \left. - \left(\frac{d\theta}{dy} \right)^2 \alpha T' \right\} dx dy \\
& + \text{cc.}
\end{aligned}$$

Per l'altra serie (e') facciamo

$$\begin{aligned}
& - \iint \left\{ \left(\frac{d\Psi}{dz} \right) \alpha + \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d\Psi}{dp} \right) + \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \left(\frac{d\Psi}{dp'} \right) + \left(\frac{d\Psi}{dV} \right) \theta' \right\} dx dy = \\
& = - \int \{ \alpha \theta' + \beta \omega \} dy - \int \{ \alpha' \theta' + \beta' \omega \} dx + \int dy + \int dx \\
& - \left(\frac{d\Psi}{dz} \right) \omega - \left(\frac{d\Psi}{dp} \right) \left(\frac{d\omega}{dx} \right) - \left(\frac{d\Psi}{dp'} \right) \left(\frac{d\omega}{dy} \right) - \left(\frac{d\Psi}{dV} \right) \theta' = - \alpha \left(\frac{d\theta'}{dx} \right) - \\
& - \theta' \left(\frac{d\alpha}{dx} \right) - \omega \left(\frac{d\beta}{dx} \right) - \beta \left(\frac{d\omega}{dx} \right) + \left(\frac{d\beta}{dx} \right) - \alpha' \left(\frac{d\theta'}{dy} \right) - \\
& - \theta' \left(\frac{d\alpha'}{dy} \right) - \omega \left(\frac{d\beta'}{dy} \right) - \beta' \left(\frac{d\omega}{dy} \right) + \left(\frac{d\beta'}{dy} \right).
\end{aligned}$$

Ora l'equazione

$(\frac{dV}{dx}) = \varphi(z, p, p', V, q)$ ci dà

$$\begin{aligned}
 -(\frac{d\theta'}{dx}) = & -\omega(\frac{d\phi}{dz}) - (\frac{d\omega}{dx})(\frac{d\phi}{dp}) - (\frac{d\phi}{dp'})(\frac{d\omega}{dy}) - (\frac{d\phi}{dV})\theta' - \\
 & - (\frac{d\phi}{dq})(\frac{d\theta'}{dy}) + \frac{i}{2}(F') + \text{cc.}
 \end{aligned}$$

indicando per (F') la stessa espressione indicata per (F) nella quale si scrive θ' in vece di θ ; avremo dunque

$$\begin{aligned}
 -(\frac{d\Psi}{dz})\omega - (\frac{d\Psi}{dp})(\frac{d\omega}{dx}) - (\frac{d\Psi}{dp'})(\frac{d\omega}{dy}) - (\frac{d\Psi}{dV})\theta' = & -\left\{z(\frac{d\phi}{dz}) + \right. \\
 & + (\frac{d\beta}{dx}) + (\frac{d\beta'}{dy}) \left. \right\}\omega - \left\{\alpha(\frac{d\phi}{dp}) + \beta\right\}(\frac{d\omega}{dx}) - \\
 & - \left\{\alpha(\frac{d\phi}{dp'}) + \beta'\right\}(\frac{d\omega}{dy}) - \left\{z(\frac{d\phi}{dV}) + (\frac{d\alpha}{dx}) + \right. \\
 & + (\frac{d\alpha'}{dy}) \left. \right\}\theta' - \left\{z(\frac{d\phi}{dq}) + \alpha'\right\}(\frac{d\theta}{dy}) + (\frac{d\delta}{dx}) + \\
 & + (\frac{d\delta'}{dy}) + \frac{i}{2}\alpha(F').
 \end{aligned}$$

E di qui ricaviamo le medesime cinque equazioni che noi abbiamo trovate sopra, quindi la stessa equazione della superficie, e gli stessi valori per $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$. La sesta equazione poi sarà

$$(\frac{d\delta}{dx}) + (\frac{d\delta'}{dy}) + \frac{i}{2}\alpha(F') = 0$$

Troveremo pertanto per (e') quest'espressione

$$(e') = -i \int \{ \alpha \theta' + \beta \omega \} dy - i \int \{ \alpha' \theta + \beta' \omega \} dx +$$

$$\frac{i^2}{2} \iint \{ \text{la stessa quantità che era in } (e) \text{ mutandovi}$$

$$\text{però } \theta, \left(\frac{d\theta}{dy} \right) \text{ in } \theta', \left(\frac{d\theta'}{dy} \right) \} dx dy + \text{ec.}$$

§ 11. Facciamo per semplicità di espressione

$$(e) = i \int \{ \alpha \theta + \beta \omega \} dy + i \int \{ \alpha' \theta + \beta' \omega \} dx +$$

$$+ \frac{i^2}{2} \iint \{ f \theta \} dx dy + \text{ec.}$$

$$(e') = -i \int \{ \alpha \theta' + \beta \omega \} dy - i \int \{ \alpha' \theta' + \beta' \omega \} dx +$$

$$+ \frac{i^2}{2} \iint \{ f \theta' \} dx dy + \text{ec.}$$

I termini ove si contiene un solo segno sommatorio, estese le integrazioni tra i limiti delle variabili x, y , debbono annullarsi indipendentemente dal valore di ω , di θ , e di θ' , nei due valori di (e) , (e') , ciò che si conseguirà per mezzo dell'indeterminazione che resta nei valori di $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, avendo riguardo alle condizioni speciali del problema nei limiti dell'integrale.

I termini poi ove si trovano due segni sommatori, debbono essere positivi nel minimo; negativi nel massimo indipendentemente dai valori di ω, θ, θ' , e dei loro differenziali parziali.

Ora supponiamo che eseguendo una delle integrazioni, possano togliersi di sotto al doppio segno le due quantità

$$\int \{g^2 \omega^2 + 2 m \theta \omega + n \theta^2\} dy + \int \{g' \omega^2 + 2 m' \theta \omega + n' \theta^2\} dx .$$

Differenziamo la prima di queste due quantità rapporto ad x , e la seconda rapporto ad y , ed avremo

$$\begin{aligned} \omega^2 \left(\frac{d g}{d x} \right) + 2 \omega \left(\frac{d \omega}{d x} \right) g + 2 \theta \omega \left(\frac{d m}{d x} \right) + 2 m \theta \left(\frac{d \omega}{d x} \right) + 2 m \omega \left(\frac{d \theta}{d x} \right) + \\ + \theta^2 \left(\frac{d n}{d x} \right) + 2 \theta \left(\frac{d \theta}{d x} \right) n + \omega^2 \left(\frac{d g'}{d y} \right) + 2 \omega \left(\frac{d \omega}{d y} \right) g' + 2 \theta \omega \left(\frac{d m'}{d y} \right) + \\ + 2 m' \theta \left(\frac{d \omega}{d y} \right) + 2 m' \omega \left(\frac{d \theta}{d y} \right) + \theta^2 \left(\frac{d n'}{d y} \right) + 2 \theta \left(\frac{d \theta}{d y} \right) n' . \end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned} (2 m \omega + 2 \theta n) \left(\frac{d \theta}{d x} \right) = (2 m \omega + 2 \theta n) \left\{ \omega \left(\frac{d \Phi}{d z} \right) + \left(\frac{d \omega}{d x} \right) \left(\frac{d \Phi}{d p} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{d \omega}{d y} \right) \left(\frac{d \Phi}{d p'} \right) + \theta \left(\frac{d \Phi}{d V} \right) + \left(\frac{d \Phi}{d q} \right) \left(\frac{d \theta}{d y} \right) \right\} + \text{ec.} \end{aligned}$$

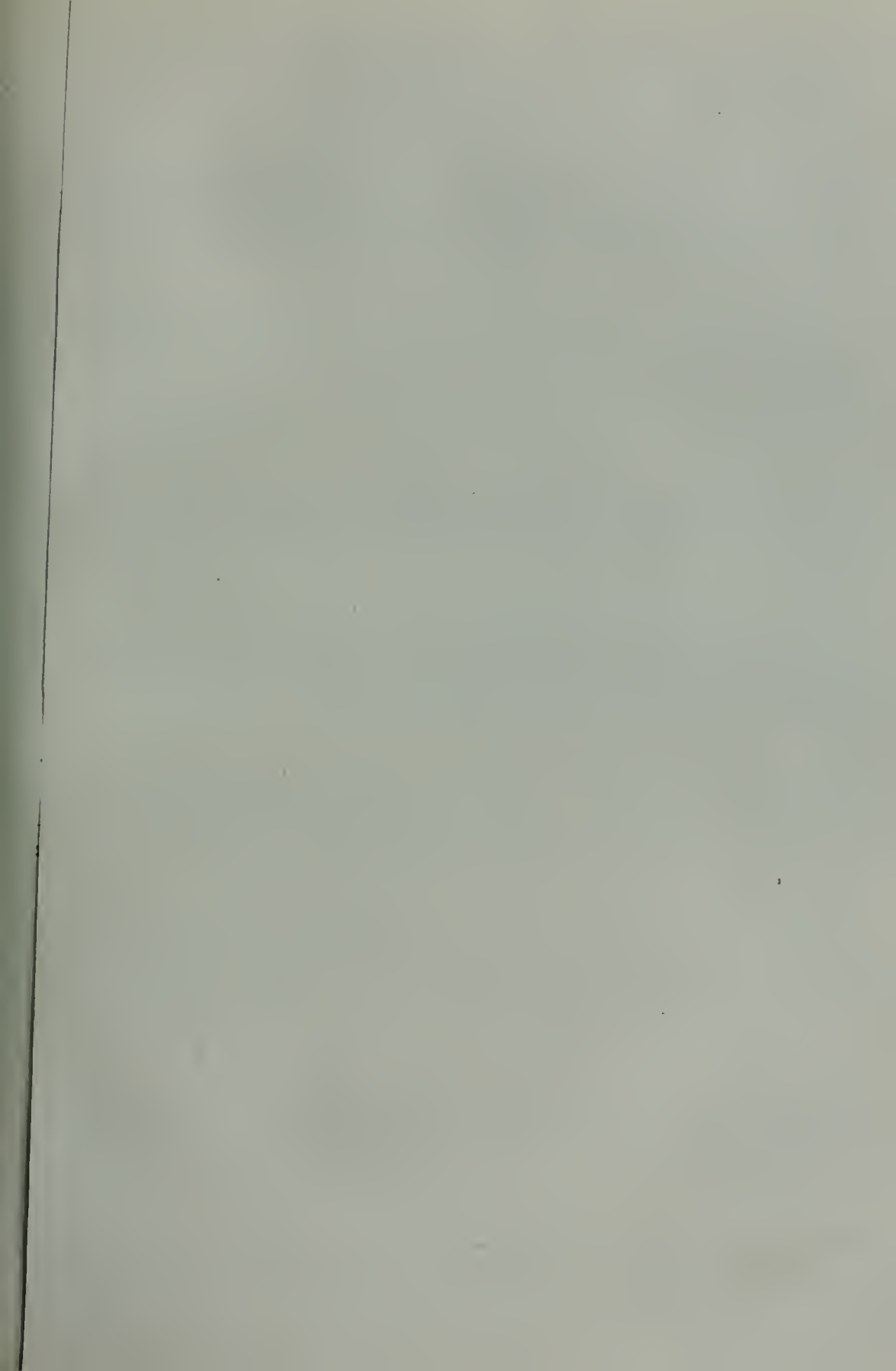
Dunque la somma dei differenziali di quelle due quantità sarà

$$\begin{aligned} \omega^2 \left\{ \left(\frac{d g}{d x} \right) + 2 m \left(\frac{d \Phi}{d z} \right) + \left(\frac{d g'}{d y} \right) \right\} + 2 \omega \left(\frac{d \omega}{d x} \right) \left\{ g + m \left(\frac{d \Phi}{d p} \right) \right\} + \\ + 2 \omega \left(\frac{d \omega}{d y} \right) \left\{ g' + m \left(\frac{d \Phi}{d p'} \right) \right\} + 2 \omega \theta \left\{ \left(\frac{d m}{d x} \right) + m \left(\frac{d \Phi}{d V} \right) + \right. \\ \left. + n \left(\frac{d \Phi}{d z} \right) + \left(\frac{d m'}{d y} \right) \right\} + 2 \omega \left(\frac{d \theta}{d y} \right) \left\{ m' + m \left(\frac{d \Phi}{d q} \right) \right\} + \end{aligned}$$

T. II. P. II.

$$\begin{aligned}
& + 2 \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \{ m + n \left(\frac{d\phi}{dp} \right) \} + \{ \left(\frac{dn}{dx} \right) + 2 n \left(\frac{d\phi}{dV} \right) + \\
& + \left(\frac{dn'}{dy} \right) \} + 2 \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \{ m' + n \left(\frac{d\phi}{dp'} \right) \} + 2 \theta \left(\frac{d\theta}{dy} \right) \{ n' + \\
& \qquad \qquad \qquad + n \left(\frac{d\phi}{dq} \right) \} + \text{ec.}
\end{aligned}$$

Indichiamo per E'' , F'' , G'' , H'' ; I'' , K'' , L'' , M'' , N'' , i coefficienti di ω^2 , $2\omega \left(\frac{d\omega}{dx} \right)$, $2\omega \left(\frac{d\omega}{dy} \right)$, ec. ed avremo



$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \iint (f') dx dy &= \frac{1}{2} \iint \{ g \omega^2 + 2 m \omega + n \omega^2 \} dy + \frac{1}{2} \iint \{ g' \omega^2 + 2 m' \omega + n' \omega^2 \} dx \\
&+ \frac{1}{2} \iint \{ \omega^2 (E - \alpha E' - E'') + 2 \omega \left(\frac{d\omega}{dx} \right) (F - \alpha F' - F'') + 2 \omega \left(\frac{d\omega}{dy} \right) (G - \alpha G' - G'') + 2 \omega \omega' (H - \alpha H' - H'') + 2 \omega \left(\frac{d\omega}{dx} \right) (-\alpha P' - I'') \\
&+ \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 (I - \alpha I') + 2 \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d\omega}{dy} \right) (K - \alpha K') + 2 \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \omega' (L - \alpha L' - K'') + 2 \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d\omega}{dy} \right) (-\alpha Q') \\
&+ \left(\frac{d\omega}{dy} \right)^2 (M - \alpha M') + 2 \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \omega' (N - \alpha N' - M'') + 2 \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \left(\frac{d\omega}{dy} \right) (-\alpha R') \\
&+ \omega^2 (O - \alpha O' - L'') + 2 \omega \left(\frac{d\omega}{dy} \right) (-\alpha S' - N'') \\
&+ \left(\frac{d\omega}{dy} \right)^2 (-\alpha T') \} dx dy \\
&+ \text{cc.}
\end{aligned}$$

Il questo secondo membro dovrà essere negativo nel massimo, e positivo nel minimo. All'integrale doppio, che in esso si trova, diamo la seguente forma.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \iint \{ &\left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 A + 2 \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d\omega}{dy} \right) A' + 2 \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{d\omega}{dy} \right) A'' + 2 \left(\frac{d\omega}{dx} \right) \omega' A''' \\
&+ \left(\frac{d\omega}{dy} \right)^2 B + 2 \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \left(\frac{d\omega}{dy} \right) B' + 2 \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \omega' B'' + 2 \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \omega B''' \\
&+ \left(\frac{d\omega}{dy} \right)^2 C + 2 \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \omega' C' + 2 \left(\frac{d\omega}{dy} \right) \omega C'' \\
&+ \omega^2 D + 2 \omega \omega' D' \\
&+ \omega^2 E \} dx dy
\end{aligned}$$

Ove sarà

$$A = I - I' \alpha$$

$$A' = K - \alpha K'$$

$$A'' = -\alpha Q'$$

$$A''' = L - \alpha L' - K''$$

$$A^{iv} = F - \alpha F' - F''$$

$$B = M - \alpha M'$$

$$B' = -\alpha R'$$

$$B'' = N - \alpha N' - M''$$

$$B''' = G - \alpha G' - G''$$

$$C = -\alpha T'$$

$$C' = -\alpha S' - N''$$

$$C'' = -\alpha P' - T''$$

$$D = O - \alpha O' - L''$$

$$D' = H - \alpha H' - H''$$

$$E = E - \alpha E' - E''$$

$$E'' = \left(\frac{d g}{d x} \right) + 2 m \left(\frac{d \phi}{d z} \right) + \left(\frac{d g'}{d y} \right),$$

$$F'' = g + m \left(\frac{d \phi}{d p} \right),$$

$$G'' = g' + m \left(\frac{d \phi}{d p'} \right)$$

$$H'' = \left(\frac{dm}{dx} \right) + m \left(\frac{d\phi}{dV} \right) + n \left(\frac{d\phi}{dz} \right) + \left(\frac{dm'}{dy} \right)$$

$$I'' = m' + m \left(\frac{d\phi}{dq} \right)$$

$$K'' = m + n \left(\frac{d\phi}{dp} \right)$$

$$L'' = \left(\frac{dn}{dx} \right) + 2n \left(\frac{d\phi}{dV} \right) + \left(\frac{dn'}{dy} \right),$$

$$M'' = m' + n \left(\frac{d\phi}{dp'} \right),$$

$$N'' = n' + n \left(\frac{d\phi}{dq} \right).$$

§ 12. Ora secondo ciò che abbiamo detto alla fine del § 8 con i coefficienti $A, A',$ ec., $B, B',$ ec. ec. (1) formando le quantità $M, K, S, X,$ quest'ultimo integrale doppio sarà positivo, o negativo, esteso tra i prescritti limiti, se per tutti i valori di x e di y compresi tra i limiti dati, avremo $A > 0; M > 0; K > 0; S > 0; X > 0;$ ovvero $A < 0; M < 0; K < 0; S < 0; X < 0.$

E siccome si trovano le medesime condizioni perchè sia positiva la quantità $\frac{1}{2} \iint (f'') dx dy$ contenuta nel valore della seconda differenza (e'), quin-

(1) Si avverta di non confondere tra loro i significati delle lettere $M, K, I,$ ec. dei tre §§ antecedenti con quei delle stesse lettere del § 8, che qui si riportano.

di concluderemo, che la cercata superficie goderà della proprietà del massimo se $A < 0$; $M < 0$; $K < 0$; $S < 0$; $X < 0$; e del minimo se tutte queste quantità saranno positive.

Riguardo poi alle quantità affette da un solo segno differenziale nei valori di $\frac{1}{2} \iint (f \theta) dx dy$,

$\frac{1}{2} \iint (f \theta') dx dy$ debbono queste, estese le inte-

grazioni tra i limiti, rendersi o positive pel minimo, o negative pel massimo, o nulle in ambedue i casi, indipendentemente dai valori di ω e di θ , avendo però riguardo alle condizioni del problema nei limiti dell' integrale. Ciò conseguiremo per mezzo dell' indeterminazione che resta nei valori di m, n, g, m', n', g' , della quale noi possiamo disporre.

Nelle tre quantità A, M, K non entrano le indeterminate m, n, g, m', n', g' ; in fatti essendo (§ ant.)

$$A = \left(\frac{d^2 \Psi}{d p^2} \right) - \alpha \left(\frac{d^2 \phi}{d p^2} \right)$$

$$A' = \left(\frac{d^2 \Psi}{d p d p'} \right) - \alpha \left(\frac{d^2 \phi}{d p d p'} \right)$$

$$A'' = - \left(\frac{d^2 \phi}{d p d q} \right) \alpha$$

$$B = \left(\frac{d^2 \Psi}{d p'^2} \right) - \alpha \left(\frac{d^2 \phi}{d p'^2} \right)$$

$$B' = - \alpha \left(\frac{d^2 \phi}{d p' d q} \right)$$

$$C = - \alpha \left(\frac{d^2 \phi}{d q^2} \right).$$

Le formole del § 8 ci danno A, M, K espresse per questi soli coefficienti: esse dunque non conterranno le indeterminate suddette. Tali indeterminate si troveranno solamente nelle quantità S, X , e dovremo determinarle in modo che S, X siano dello stesso segno delle altre tre, ovvero siano nulle. Il massimo adunque ed il minimo ci sarà dato dall'essere $A < 0, M < 0; K < 0$; ovvero $A > 0, M > 0, K > 0$. Alle altre due condizioni soddisfaremo per mezzo delle quantità m, n, g, m', n', g' ; delle quali quattro rimarranno sempre al nostro arbitrio.

Fig. 1.

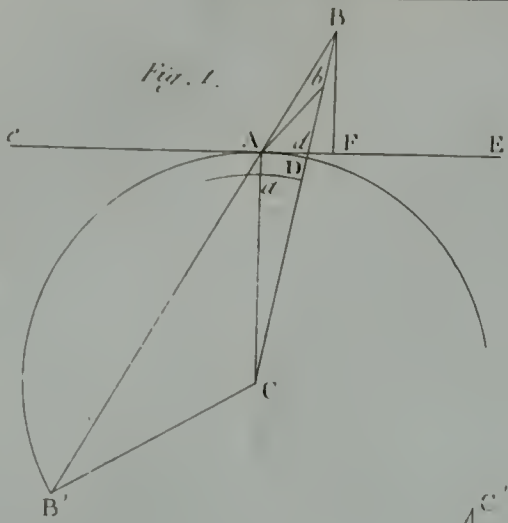


Fig. 2.

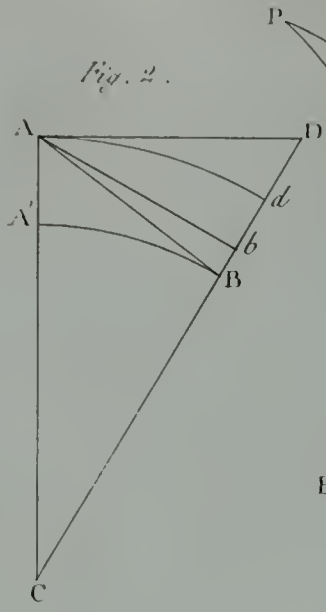


Fig. 3.

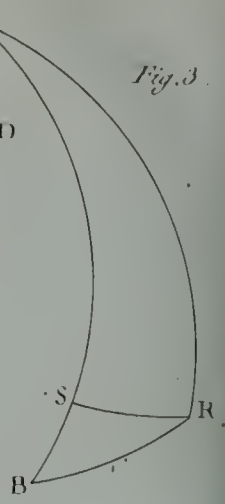


Fig. 4.

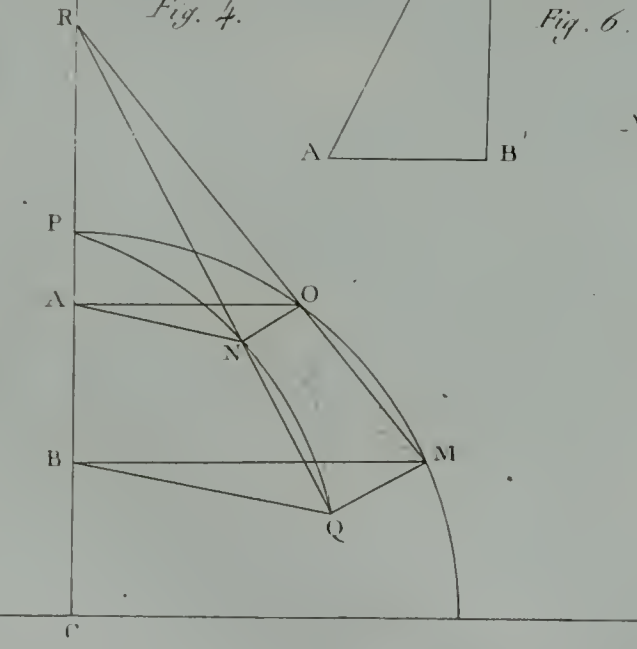


Fig. 6.

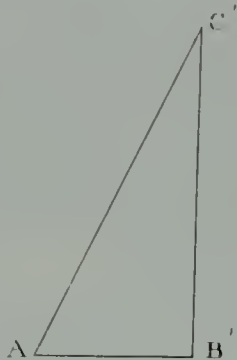
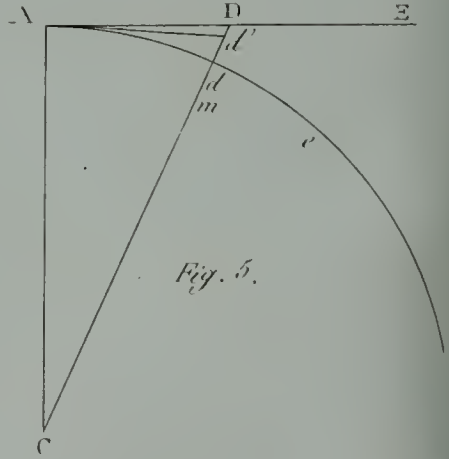


Fig. 5.



SULLE LIVELLAZIONI BAROMETRICHE

DI FRANCESCO VENINI

Continuazione della parte II.

ricevuta il dì 11 di Aprile 1869

DEI METODI COMUNEMENTE CHIAMATI INDIRETTI, O DEI CALCOLI
D' ALCUNE OSSERVAZIONI BAROMETRICHE.

SEZIONE I

Delle misure geometriche delle altezze

ARTICOLO I

*Metodi per misurar le altezze apparenti per mezzo
dell' angolo d' elevazione.*

52. **T**utti i Fisici, che han data qualche regola per misurar le altezze col barometro han procurato di confermarla per mezzo delle misure geometriche o delle livellazioni ordinarie fatte con esattezza. Ma, non essendo difficile di cader in errori non dispregevoli nel calcolo delle misure geometriche, come avremo occasion di vedere in appresso; ho creduto di far cosa utile ai leggitori trattando anche questo argomento con qualche estensione, tanto più, che altri, ch' io sappia, non l' ha fatto ancora.

Il Sig. Cassini nel trattato della grandezza e figura della Terra dice con ragione, che per calcolar l' altezza d' un monte sopra il livello del mare sa-

pendo di quanto è superior al mare il luogo, in cui si misura l'angolo d'elevazione del monte, convien risolvere il triangolo CAB (fig. 1), nel quale C è il centro della Terra; a un punto di livello colla superficie del mare, ed A il luogo dell'osservazione. Ora in sì fatto triangolo, prosiegue egli, son noti i due lati CA , AB , e l'angolo da essi compreso; poichè questo è uguale alla somma di 90 gradi, e dell'angolo osservato EAB dell'altezza apparente del monte sopra la retta orizzontale o tangente del punto A nel circolo, il cui raggio è CA . Sarà dunque nota anche la grandezza di CB distanza del centro terrestre dalla sommità del monte; dalla qual distanza sottraendo il raggio della Terra resta l'altezza perpendicolare del monte sopra il livello del mare.

Quanto alla distanza o linea visuale AB ognun sa, ch'ella si determina col calcolo trigonometrico per mezzo d'una base di nota lunghezza e degli angoli fatti con quella dalle due linee visuali, che vanno dalle sue estremità alla cima del monte. Ora nel triangolo CAB , di cui son noti i lati CA , AB coll'angolo compreso si ha, per le note regole trigonometriche la seguente analogia

$$CA + AB : CA - AB = \tan \frac{B + C}{2} : \tan \frac{B - C}{2} .$$

Essendo noto l'angolo CAB sarà nota anche la semisomma degli altri due, ed il logaritmo della tangente di questa semisomma si troverà nelle tavole. Da questo e dai logaritmi di $CA + AB$ e di $CA - AB$ si conchiuderà il logaritmo della tangente di

$\frac{B-C}{2}$; di cui troverassi nelle tavole l'angolo cor-

rispondente. Fatta la somma dei valori cognitivi di

$\frac{B+C}{2}$, $\frac{B-C}{2}$ si avrà il valor di B : e la differenza

loro darà quello di C angolo situato al centro della Terra, e distinto per ciò col nome di angolo al centro.

Trovati i valori degli angoli B e C , quello della distanza CB si determina colla seguente analogia

$$\text{sen. } B : \cos. EAB = CA : CB;$$

dalla qual si deduce

$$LCB = L \cos. EAB + LCA - L \text{ sen. } B.$$

Eccone alcuni esempj tratti dal libro summen-
tovato della grandezza e figura della Terra, pei quali
il Cassini suppose il raggio terrestre di tese 3271420
tratto dalla misura dell'arco di meridiano compreso
fra Collioure e l'osservatorio di Parigi.

*Calcolo dell'altezza del piede della torre della
Mucelotte sopra il livello del mare.*

I dati del calcolo sono i seguenti

$$Aa = 10 \text{ te. } CA = Ca + aA = 3271430 \text{ te.}$$

$$EAB = 8^\circ 27' 10''; AB = 2223 \text{ te.; e da questi vie-}$$

$$\text{ne } CA + AB = 3273658; CA - AB = 3269202;$$

$$\text{e } \frac{B+C}{2} = 40^\circ 46' 25''.$$

T. II. P. II.

Ciò premesso abbiamo

$$L \tan. \frac{B+C}{2} = 9 . 9356954$$

$$L(CA - AB) = 6 . 5144418$$

$$\text{Somma} = 16 . 4501372$$

$$L(CA + AB) = 6 . 5150334$$

$$L \tan. \frac{B-C}{2} = 9 . 9351038$$

$$\frac{B-C}{2} = 40^{\circ} 44' 6'' , 06$$

$$B = \frac{B+C}{2} + \frac{B-C}{2} = 81^{\circ} 30' 31'' , 06$$

$$C = \frac{B+C}{2} - \frac{B-C}{2} = 0^{\circ} 2' 18'' , 94$$

Determinato per tal modo il valor di B fatti, come segue qui sotto il calcolo dell' altezza.

$$L \cos. EAB = 9 . 9952566$$

$$LCA = 6 . 5147377$$

$$16 . 5099943$$

$$L \sin. B = 9 . 9952130286$$

$$LCB = 6 . 5147812714$$

$$CB = 3271758,43; DB = CB - CA = 328,43 \text{ te.}$$

Questa è l'altezza del piè della torre della *Mattelotte* sopra il luogo dell'osservazione ed, aggiunte a questa 10 tese, si ha l'altezza sopra il livello del mare di te. 338, 43. Il Cassini la dice di 336, 5; ma ne' suoi calcoli è scorso certamente qualche piccolo errore. Per chiarirsene si abbassi da B sulla tangente la perpendicolare BF ; la quale, sebbene di poco, è manifestamente minore dell'altezza vera BD . Ciò fatto si osservi, esser $BF =$

$\frac{AB \text{ sen. } EAB}{r}$, esprimendo per r il raggio delle tavo-

le; e che per conseguenza è $LB F = LAB + L \text{ sen. } EAB - 10 = 2.5152155$; al qual logaritmo corrisponde un numero alquanto maggiore di 327, 5. Anche BD sarà dunque maggiore di 327, 5; e $BD + 10 > 337, 5$. L'altezza assegnata dal Cassini è dunque minor della vera poco meno di due tese; ma forse per error di stampa si è posto 336 in luogo di 338.

Calcolo dell'altezza del monte Canigon ne' Pirenei.

(nota. Alla pag. 56 lin. 20 della prima parte si sostituisca *Coracon a Canigon*).

In quest'esempio fu $Aa = 1, 5$; $CA = 3271421, 5$; $AB = 28767$; ed $EAB = 2^\circ 37' 0''$. Fu dunque

$CA + AB = 3300188, 5$; $CA - AB = 3242654, 5$;

e $\frac{B+C}{2} = 43^\circ 41' 30''$. Da questi dati viene il calcolo seguente

$$L \tan. \frac{B+C}{2} = 9.9801591$$

$$L(CA - AB) = 6.510900707$$

$$16.491059307$$

$$L(CA + AB) = 6.518538326$$

$$L \tan. \frac{B-C}{2} = 9.972520931; \frac{B-C}{2} = 43^{\circ} 11' 18'', 88$$

$$B = 36^{\circ} 52' 48'', 88; C = 0^{\circ} 30' 11'', 12$$

Il calcolo dell'altezza è dunque come qui sotto.

$$L \cos. EAB = 9.9995469$$

$$LCA = 6.514736597$$

$$16.514283497$$

$$L \sin. B = 9.9993553768$$

$$LCB = 6.5149276202$$

$$CB = 3272861,05 \text{ te.}; DB = 1439,55$$

A questo valore aggiungo una tesa e mezzo; e n' ho l'altezza del Canigou sopra il livello del mare di te. 1441,05. Questa, secondo il Cassini è di 1441;

onde la differenza fra i nostri risultati è di $\frac{5}{100}$ di tesa su 1441.

Calcolo pel monte San Bartolomeo

Dati

$$CA = 3271421, 5; AB = 52420$$

$$CA + AB = 3323841, 5; CA - AB = 3219001, 5$$

$$EAB = 0^{\circ} 50' 0''; \frac{B+C}{2} = 44^{\circ} 35' 0''$$

Il calcolo per gli angoli è dunque questo

$$L \tan. \frac{B+C}{2} = 9.9936832$$

$$L(CA - AB) = \frac{6.507721198}{16.501404398}$$

$$L(CA + AB) = \frac{6.521640296}{16.501404398}$$

$$L \tan. \frac{B-C}{2} = 9.979764102$$

$$\frac{B-C}{2} = 43^{\circ} 39' 56'', 29$$

$$B = 88^{\circ} 14' 56'', 29; C = 0^{\circ} 55' 3'', 71$$

Queste premesse danno il seguente calcolo dell'altezza.

$$L \cos. EAB = 9.9999541$$

$$LCA = \frac{6.514736597}{16.514690697}$$

$$L \sin. B = 9.9997971774$$

$$LCB = 6.5148935196$$

$$CB = 3272604, 66; DB = 1183, 16.$$

Tal è l'altezza del monte sopra il luogo dell'osservazione; alla quale aggiungendo una tesa e mezzo si ha l'altezza sopra il mare di tese 1184, 66. Giusta il Cassini ella è di 1184, 5; onde la differenza riducesi a $\frac{16}{100}$ di tesa.

53. Dopo d'aver trovato nel triangolo CAB i valori degli angoli B e C , l'altezza BD può calcolarsi anche col triangolo ABD . A questo fine si cercherà il valore di AD corda dell'angolo al centro. Ora la corda di qualunque arco A in un cerchio, il cui raggio sia R è $= \frac{2R}{r} \text{sen.} \frac{A}{2}$ esprimendo per r il raggio delle tavole. Nel caso nostro sarà dunque $AD = \frac{2CA}{r} \text{sen.} \frac{C}{2}$; ovvero, chiamando ω l'angolo al centro $\frac{2CA}{r} \text{sen.} \frac{\omega}{2}$. Determinato il valore di

AD si avrà quello eziandio di BD per mezzo dell'analogia $\text{sen.} B : \text{sen.} BAD = AD : BD$. In questa l'angolo BAD è uguale alla somma dell'osservato EAB , e di EAD formato dalla tangente e dalla corda, e per conseguente uguale alla metà dell'angolo al centro. E' dunque $BAD = EAB + \frac{\omega}{2}$. Anche l'espressione dell'angolo B è d'una forma simile a quella di BAD ; poichè, essendo $B = 130^\circ - CAB - \omega$,

e $C A B = 90^\circ + E A B$ sarà $B = 90^\circ - E A - \omega$.

Ciò posto avremo $\text{sen. } B A D = \text{sen. } (E A B + \frac{\omega}{2})$; e $\text{sen. } B = \cos. (E A B + \omega)$. Sostituiti in fine questi valori nella precedente analogia ne trarremo

$$D B = \frac{A B \text{ sen. } (E A B + \frac{\omega}{2})}{\cos. (E A B + \omega)}.$$

Nell'osservazione della torre della Matelotte si ebbe

$E A B = 8^\circ 27' 10''$; $\omega = 0^\circ 2' 18''$, 94; e $C A = 3271430$.

Dunque, per calcolare la corda $A D$, avremo

$$L 2 = 0 . 3010300$$

$$L C A = 6 . 5147377$$

$$L \text{ sen. } \frac{\omega}{2} = 6 . 5273609$$

$$\text{Somma} = 13 . 3431286$$

$$L r = 10 .$$

$$L A D = 3 . 3431286; AD = 2203,68.$$

Dopo d'aver trovato il valore di $A D$ calcoleremo anche quello di $B D$ nel modo seguente.

$$L \text{ sen. } (E A B + \frac{\omega}{2}) = 9 . 1682834$$

$$L A D = 3 . 3431286$$

$$12 . 5114120$$

$$L \cos. (E A B + \omega) = 9 . 9952149$$

$$L D B = 2 . 5161971; D B = 328,244$$

Nel primo esempio, calcolando quest'altezza medesima col triangolo CAB , l'abbiam trovata di 328, 43 te.; cosicchè la differenza fra i due risultati non giugne ad un quinto di tesa.

Pel monte Canigou l'angolo al centro è $30' 11'', 12$;

$$EAB + \frac{\omega}{2} = 2^{\circ} 52' 5'', 56; \text{ ed } EAB + \omega = 3^{\circ} 7' 11'', 12.$$

Fatto il calcolo con questi dati e col valor di CA si trova $DB = 1439, 489$ valor minore del trovato col calcolo del triangolo CAB di 6 centesimi di tesa.

Pel monte San Bartolomeo l'angolo al centro è

$$55' 3'', 71; EAB + \frac{\omega}{2} = 1^{\circ} 17' 31'', 85; \text{ ed } EAB +$$

$\omega = 1^{\circ} 45' 3'', 71$. Facciasi il calcolo con questi dati; e si troverà $DB = 1182, 154$ valor minore d'una tesa di quello, che ci ha dato il calcolo del triangolo CAB .

54. Quando la visuale AB non eccede la lunghezza d'un grado di latitudine, l'angolo al centro e l'altezza DB potranno determinarsi nel modo seguente anche per mezzo del triangolo ABF . In questi casi la retta AF può senz'alcun sensibil errore sostituirsi alla tangente Ad . Ora AF è =

$$\frac{AB \cos. EAB}{r}; \text{ vale a dir, ch'essa è nota quando la}$$

visuale AB , e l'angolo d'elevazione son noti. Il valor cognito di AF è dunque l'espressione della tangente dell'angolo al centro in un circolo; il cui

raggio è CA ; e per conseguenza $\frac{r AF}{CA}$ è l'espressione della tangente dell'angolo anzidetto nel cerchio del raggio r , che è quel delle tavole. Per mezzo di queste troverassi dunque l'angolo C , ed il coseno e la secante, che gli convengono.

Come AF è $= \frac{AB \cos. EAB}{r}$, così BF è $= \frac{AB \sin. EAB}{r}$. Or si osservi, che pei triangoli simili $CA d$, $BF d$ è $Bd = \frac{Cd \cdot BF}{CA}$. Ma nel triangolo $CA d$ è $CA : Cd = r : \sec. C$. Sarà dunque $Cd = \frac{CA \sec. C}{r}$; e per conseguente $Bd = \frac{BF \sec. C}{r} = \frac{AB \sin. EAB \sec. C}{r^2} = \frac{AB \sin. EAB}{\cos. C}$. In oltre Dd è $= Cd - CA = \frac{CA \sec. C}{r} - CA = CA \left(\frac{\sec. C - 1}{r} \right)$. Sarà dunque $BD = \frac{AB \sin. EAB}{\cos. C} + CA \left(\sec. \frac{C}{r} - 1 \right)$.

Per la torre della Matelotte abbiamo $CA = 3271430$; $AB = 2228$; ed $EAB = 3^\circ 27' 10''$. Con questi dati il valor di AF si calcola nel modo seguente

T. II. P. II.

$$L \cos. E A B = 9 . 9952566$$

$$L A B = 3 . 3479152$$

$$\text{com. } L C A = 3 . 4852623$$

$$L \tan. C = 6 . 8284341 ; C = 2' 18'' , 95.$$

Nell' esempio I° calcolando col triangolo $C A B$ abbiain trovato lo stess' angolo $= 2' 18'' , 94$: onde la differenza dei due risultati si riduce ad un centesimo di secondo.

Determinato così l'angolo al centro si passa a calcolar l' altezza $B d$ come qui sotto

$$L \sin. E A B = 9 . 1673003$$

$$L A B = 3 . 3479152$$

$$12 . 5152155$$

$$L \cos. C = 9 . 9999999$$

$$L B d = 2 . 5152156 ; B d = 327 , 503.$$

Resta da trovarsi il valore di $d D$; al qual fine supporremo il raggio delle tavole uguale all' unità. In questa supposizione avremo $d D = C A (\sec. C - 1)$; e nel caso presente $= C A (\sec. 2' 18'' , 95 - 1)$. Ora egli è noto, che le porzioni delle secanti comprese fra la tangente e la periferia sono nei piccoli angoli ad un di presso in ragione duplicata degli angoli medesimi. Sendo dunque $\sec. 2' - 1 = 0 , 0000002$, l' analogia $(120'')^2 : (138'' , 95)^2 = 0 , 0000002 : x$ ci darà il valor di $d' x$ col calcolo seguente

$$L(138,95)^2 = 4 \cdot 2857172$$

$$L 0,0000002 = 3 \cdot 3010300$$

$$7 \cdot 5867472$$

$$L(120)^2 = 4 \cdot 1583624$$

$$Lx = 3 \cdot 4283848; x = 0,000000268'.$$

Questa frazione moltiplicata per 3271430 valor di CA ne darà finalmente $dD = 0,8772$; e quindi $BD = Bd + dD = 328,3802$ valore minor di quello che dà il calcolo del triangolo CAB di $\frac{5}{100}$ di tesa.

Pel Canigou fu $CA = 3271421,5$; $AB = 28767$; ed $EAB = 2^\circ 37' 0''$. Fu dunque $LA F = LAB + L \cos. EAB - LCA = 7 \cdot 9437038$; al qual logaritmo della tangente corrisponde nelle tavole l'angolo $0^\circ 30' 11''$, 83. Con questi dati calcolo l'altezza

$$Bd = \frac{AB \sin. EAB}{\cos. C}; \text{ e lo trovo } = 1313,37 \text{ te.}$$

Or per aver anche il valore di dD mi valgo dell'analogia $(30')^2 : (30', 197)^2 = 0,0000381 : x$; e n' ho $x = 0,000038574$; e da questo valore moltiplicato per quel di CA mi risulta 126,38; onde viene $BD = Bd + dD = 1439,65$; valore che supera di un decimo di tesa quello del triangolo CAB .

Facendo alfine pel monte San Bartolomeo un calcolo simile ai precedenti si trova $Bd = 762,4888$;

$dD = +19, 81$; e $BD = 1182, 2988$; vale a dire; che questo risultato è minore di quello del triangolo CAB di 86 centesimi di tesa.

Il valor medesimo di dD può determinarsi anche in quest'altra maniera più spedita. Qualunque sia l'angolo al centro il valor di dD è rigorosamente

$$te = \frac{\overline{Ad}^2}{2R + dD} \text{ esprimendo per } R \text{ il raggio terrestre.}$$

Ma nelle livellazioni ordinarie e nelle misure geometriche delle altezze l'angolo al centro è sempre così picciolo, che senza pericolo d'alcun sensibile errore si può sostituire AF ad Ad , e ridurre il denominatore

$$\text{a } 2R. \text{ Ciò fatto sarà } dD = \frac{\overline{AF}^2}{2R}; \text{ e } LdD = 2LAF -$$

$L2R$; ovvero $2LAF + \text{com. } L2R$ pe' casi della differenza negativa.

Per la torre della Matelotte abbiamo $2LAF = 6.6863436$, e $\text{com. } L2R = 3.1842323$; e quindi $LdD = 9.8705759$; e $dD = 0, 74229$.

Pel Canigon è $2LAF = 8.9168830$, e $L2R = 6.815766597$; onde viene $LdD = 2.10116403$; e $dD = 126, 21$.

Finalmente pel monte San Bartolomeo si ha $2LAF = 9.4389022$; $L2R$ come pel Canigon; $LdD = 2.623135603$; e $dD = 419, 89$.

Le differenze tra questi valori e quelli, che qui sopra abbiain trovati sono $-0, 12491$; $-0, 07$; e $+0, 08$.

55. Ma, poichè nel modo comune si è determi-

nata la lunghezza della visuale AB e misurato l'angolo EAB , può determinarsi l'altezza DB senza calcolare alcun altro triangolo. A questo fine si prolunghi entro al circolo la visuale BA fino a che ne tagli la circonferenza in qualch'altro punto B' , e lo stesso si faccia del raggio R . Consta dagli elementi geometrici, esser $BA(BA + AB') = BD(BD + 2R)$. Or l'angolo osservato EAB è uguale ad eAB' opposto al vertice; e questo, essendo formato dalla corda e dalla tangente è $= \frac{ACB'}{2}$. Dunque la corda

AB' , la qual è $= 2R \text{ sen. } \frac{ACB'}{2}$ dev' esser uguale

anche a $2R \text{ sen. } EAB$. Sia $AB = a$; $EAB = \varphi$; $AD = x$; ed avremo l'equazione $x(x + 2R) = a(a + 2R \text{ sen. } \varphi)$; dalla qual si deduce

$$x = -R + \sqrt{R^2 + a(a + 2R \text{ sen. } \varphi)}.$$

Applichiamo il metodo all'esempio della torre della Matelotte; in cui fu $a = 2228$; $\varphi = 8^\circ 27' 10''$; e giusta la supposizione del Cassini $R = 3271430$. Ciò posto, per aver il valore di $2R \text{ sen. } \varphi$ faremo il solito calcolo, cioè

$$\begin{array}{r} L 2 = 0 . 3010300 \\ L R = 6 . 5147377 \\ L \text{ sen. } \varphi = 9 . 1673003 \\ \hline 5 . 9830680 \end{array}$$

A questo logaritmo corrisponde il numero 961762,

88; al quale aggiunto 2228 avremo $a + 2 R \text{ sen. } \phi = 963990, 88$. Con questi dati calcolo come segue

$$L(a + 2 R \text{ sen. } \phi) = 5 . 984072885$$

$$L a = 3 . 3479152$$

$$9 . 331988085$$

Cerco il numero corrispondente a questo logaritmo, e trovo 2147771708. Tal è dunque il valore di $a(a + 2 R \text{ sen. } \phi)$; al qual deve aggiugnersi il quadrato di R per aver l'intera quantità di cui dessi prendere la radice quadrata. Ora il doppio del logaritmo di R è 13 . 0294754; ed a questo corrisponde il numero 10702258620689. L'intero numero posto sotto il radicale è dunque 10704406392397. Il logaritmo di questo è 13 . 0295625562, e la sua metà 6 . 5147812781; il cui numero corrispondente è 3271758, 42. Ne levo 3271430 valore di R ; e mi resta 328, 42 risultato minore d'un sol centesimo di tesa paragonato a quello del triangolo $C A B$.

Da quest'esempio vedesi apertamente quanta sia l'esattezza del metodo; ma si vede altresì, ch'esso conduce a calcoli laboriosi; e che non è perciò da preferirsi agli altri metodi d'un calcolo men complicato.

Supposto $C B = x$ sarà $(x - R)(x + R) = a(a + 2 R \text{ sen. } \phi)$; ed $x = \sqrt{(a^2 + 2 a R \text{ sen. } \phi + R^2)}$; ovvero, poichè $\text{sen. } \phi = -\cos. (90^\circ + \phi)$, sarà $x = \sqrt{(a^2 - 2 a R \cos. (90^\circ + \phi) + R^2)}$; che è la formula trigonometrica, dalla quale è espresso il lato $C B$ nel triangolo $C A B$.

56. Per metter meglio in chiaro la corrisponden-

za fra i miei risultati e quelli del Cassini io ho supposto, com' egli fa nel luogo citato, che la Terra sia sferica e d' un raggio $= 3271420$ tese. Ma egli è ora fuor d' ogni dubbio, esser la Terra una sferoide compressa ai poli ed enfiata all' equatore; in cui però assai piccola è la differenza degli assi in confronto della lunghezza loro. Il misurar l' altezza d' un punto al di sopra d' una sferoide consiste nel trovar la lunghezza della perpendicolare, che va da quel punto alla superficie sferoidica. Ma sì fatte perpendicolari non concorron nel centro della sferoide come concorrono in quello della sfera, e questa diversità rende la misura delle altezze più difficile nella sferoide che nella sfera. Nondimeno, quando gli archi d' un meridiano sferoidico son piccioli, essi confondonsi cogli archetti di quel circolo, che i Geometri chiamano *osculatore*; il che facilita di molto la misura delle altezze anche nella sferoide. Imperciocchè, per misurar un' altezza ad una data latitudine sulla Terra, che si suppone una sferoide ellittica, si cercherà di quante tese, giusta le più esatte misure in questi ultimi tempi eseguite, sia il grado del meridiano a quella latitudine; e sen conchiuderà la lunghezza del raggio osculatore di quel grado; ossia il valore di Ca nella fig. I°. Ora si avverta che, volendo sulla sferoide terrestre misurar le altezze con precisione, ciò dee farsi in quelle soltanto, per le quali l' angolo al centro della sfera generata dalla rivoluzione del circolo osculatore è molto picciolo, ed al più poco maggiore d' un grado. Allora si può supporre senza pericolo d' alcun sensibil errore, che la perpendicolare condotta da

B alla superficie terrestre sia perpendicolare anche alla sfera osculatrice del punto A ; e si confonda per conseguente colla retta, che congiunge i punti C, B perpendicolare anch' essa alla superficie della sfera osculatrice. Il calcolo delle altezze si farà dunque come se la Terra fosse sferica e d' un raggio uguale a quello del circolo osculatore della data latitudine.

Per dichiarare in qual modo s' abbia a calcolar questo raggio io prenderò i dati da un' eccellente memoria del Sig. Abate Oriani impressa nelle Effemeridi astronomiche di Milano per l' anno 1807 col titolo *Formole per calcolare la latitudine e la longitudine sullo sferoide ellittico*.

„ Facendo, dice egli, il semiasse della Terra $= b$;
 „ il semidiametro maggiore, ossia il raggio dell' equa-
 „ tore $= a$; l' eccentricità del meridiano $= e =$

„ $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$; si avrà il rapporto $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$. In

„ oltre, posto nella latitudine λ il grado del meridia-

„ no $= G$, sarà $G = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \text{ sen. } \lambda^2)^{\frac{3}{2}}}$; nella qual

„ formola $\pi = 3, 14159265$ esprime la semicirconfe-

„ renza del circolo, il cui raggio è $= 1$. Similmente

„ nella latitudine λ' sarà il grado del meridiano $G' =$

„ $\frac{\pi}{180^\circ} \cdot \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \text{ sen. } \lambda'^2)^{\frac{3}{2}}}$; onde ne risulta

$$e^2 = 1 - \left(\frac{G}{G'}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{\text{sen. } \lambda'^2 - \left(\frac{G}{G'}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ sen. } \lambda^2}{\text{sen. } \lambda'^2}$$

„ Sotto l'equatore abbiamo $\lambda = 0$; $G = 56753$
 „ tese francesi; e nella latitudine media del grand'ar-
 „ co misurato ultimamente in Francia

„ $\lambda' = 46^\circ 11' 58''$, $G' = 57018$ tese: si ottiene quindi

„ $e^2 = 0,00596148$

„ $a = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{56753}{1 - e^2} = 3271209$ tese

„ $b = a \sqrt{1 - e^2} = 3261443$ tese

Le osservazioni del Cassini furon fatte a Collioure, e presso lo stagno di Leucate alla latitudine di

quasi 43 gradi. Nella formola $G = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{3}{2}}}$

pongo dunque $\lambda = 43^\circ$; e trovo il logaritmo del numeratore $= 17.0092613$, e quello del denominatore $= 12.2534630$. Or quindi viene $LG = 4.7557983$, e $G = 56990$. Per trovar il raggio del circolo osculatore, nel quale ogni grado è di 56990 tese mi valgo della seguente analogia $\pi : 1 = 180^\circ \cdot 56990 : R$; la quale mi dà $R = 3265283,46$. In tutti i calcoli delle altezze posti qui sopra si dee dunque nel valore di Ca sostituire $3265283,46$ a 3271420 ; ma da questa sostituzione nascerà nei risultati dei calcoli una piccolissima differenza.

Ecco il calcolo per la torre della Matelotte; ove

fu $AB = 2223$; $EAB = 8^\circ 27' 10''$; e $\frac{B+C}{2} = 40^\circ 46' 25''$.

Essendo $Ca = 3265283,46$; ed il punto A superiore
 $T. II. \quad P. II. \quad 24$

ad a di 10 tese abbiamo $CA = 3265293,46$; e quindi $CA - AB = 3263065,46$; e $CA + AB = 3267521,46$.
Con questi dati io calcolo così

Per gli angoli

$$L \tan. \frac{B+C}{2} = 9.9356954$$

$$L(CA - AB) = \frac{6.513625831}{16.449321231}$$

$$L(CA + AB) = \frac{6.514218491}{16.449321231}$$

$$L \tan. \frac{B-C}{2} = 9.93510274; \frac{B-C}{2} = 40^{\circ} 44' 5'', 3$$

$$B = 81^{\circ} 30' 30'', 3; C = 0^{\circ} 2' 19'', 2.$$

Per l' altezza

$$L \cos. EAB = 9.9952566$$

$$LCA = \frac{6.513922261}{16.509178861}$$

$$L \sin. B = \frac{9.995212948}{16.509178861}$$

$$LCB = 6.513965913; CB = 3265621,9$$

$$DB = 328,44.$$

L'accrescimento dell'altezza è qui d'un solo centesimo di tesa.

Per far il calcolo del Canigou abbiamo, oltre ai dati dell'esempio II, $CA = Ca + 1,5 = 3265284,96$; e con questi si trovano gli angoli $B = 86^{\circ} 52' 45'', 26$; e

$C = 0^{\circ} 30' 14'' , 74$. Quanto all'altezza il calcolo dà $CB = 3266723 , 9$; e $DB = 1438 , 94$. Qui pure si ha un accrescimento di soli 14 centesimi di tesa.

Finalmente pel monte San Bartolomeo i risultati del calcolo sono $CB = 3266467 , 32$; e $DB = 1182 , 36$. In questo caso l'altezza è minore di 4 quinti di tesa.

Da questi esempj raccogliesi, che per le latitudini poco distanti dalla media 45° si potrà senz'alcuno inconveniente usar il raggio osculatore di 45 gradi; il qual è di tese 3266300 , e così risparmiare i calcoli delle lunghezze dei gradi, e dei raggi osculatori, che lor corrispondono.

ARTICOLO II.

Delle rifrazioni terrestri.

57. Tutte le altezze determinate coi metodi dei numeri precedenti si riferiscono al punto B , in cui termina la visuale AB . Ma questo punto non è la vera sommità del monte; la quale è veramente in b ; ma la rifrazion della luce l'innalza più o meno secondo che maggiore o minore è la distanza del punto A da quello, in cui la superficie terrestre è tagliata da una perpendicolare abbassata da B ; o in altri termini secondo che maggiore o minore è l'angolo ACB compreso dalle rette, che dai punti A e B vanno al centro della sfera osculatrice del punto A ; e che abbiám già detto chiamarsi angolo al centro. Io seguirò a nominarlo ω ; ed esprimerò colla frazione

$\frac{m}{n}$ il rapporto della rifrazione a quest'angolo; onde la rifrazione sarà $\frac{m \cdot \omega}{n}$.

Il valore di $\frac{m}{n}$ non è per verità noto esattamente; ma il celebre Lambert applicando ad alcune osservazioni del Cassini, che si leggon nell'opera da me già citata, la sua ingegnosa teoria delle rifrazioni circolari presso la superficie della Terra ne concluse che l'angolo di rifrazione è un quattordicesimo dell'angolo al centro, ossia che $\frac{m}{n} = \frac{1}{14}$. Egli è però mestie-

ri d'osservare, che il dotto matematico fece i suoi calcoli senza saper qual fosse la densità dell'aria nei luoghi delle osservazioni; poichè il Cassini non fa in esse menzion veruna del barometro e del termometro. Si veggia l'opera del Lambert intitolata *Les propriétés remarquables de la lumière* ec. pag. 70, 71, 75.

Il miglior mezzo per determinare la quantità della rifrazion terrestre è, come i Fisici ben sanno, il seguente. Si misurino con somma esattezza nel tempo medesimo gli angoli apparenti d'altezza, e di depressione in due luoghi pe' quali sia noto l'angolo al centro; e questi si chiamino a e d . Sia ω l'angolo al centro; e la rifrazione si esprima per r . Il vero angolo d'altezza sarà dunque $a - r$; ed il vero di depressione $d - \omega + r$. Or, dovendo queste due espressioni dello stess'angolo esser uguali fra loro, sarà $a - r = d - \omega + r$ equazione, da cui si trae

ben facilmente $r = \frac{a + \omega - d}{2}$. L'uso di questa for-

mola può vedersi nei due esempj seguenti.

Il Sig. Cassini de Thury dal monte di Santa Vittoria osservò in Provenza la depressione del monte *des Houpies*, e da questo l'altezza del primo. Le osservazioni gli diedero $d = 0^{\circ} 41' 40''$; ed $a = 0^{\circ} 16' 45''$. L'angolo al centro ω determinato colle misure trigonometriche fatte per la verificazione della meridiana di Francia fu $0^{\circ} 28' 15''$, $5 = 1695'', 5$. Or questi nu-

meri sostituiti nella formola danno $r = \frac{3' 20'', 5}{2} =$

$100'', 25$. Quì abbiám dunque $\frac{m}{n} \cdot 1695'', 5 = 100'', 25$;

e per conseguente $\frac{m}{n} = \frac{100'', 25}{1695, 5} = 0, 0591 = \frac{1}{16, 92}$.

Le osservazioni fatte al monte *des Houpies*, e ad Acquamorta diedero $d = 0^{\circ} 40' 20''$; $a = 0^{\circ} 9' 41''$; ed

$\omega = 0^{\circ} 35' 36''$. Da questi dati risulta $r = \frac{4' 57''}{2} =$

$148'', 5$. In quest'osservazione fu dunque $\frac{m}{n} \cdot 2136'' =$

$143'', 5$; e quindi $\frac{m}{n} = 0, 0695 = \frac{1}{14, 38}$. Il valor me-

dio dei due sarà dunque $\frac{0, 0591 + 0, 0695}{2} = 0, 0643 =$

$\frac{1}{15, 55}$.

Se avessimo un buon numero di simili osservazioni fatte a que' diversi angoli al centro, ai quali senza pericolo d' errore posson misurarsi le altezze dei monti, ed a varie densità dell' aria indicate dal barometro e dal termometro, noi potremmo forse dedarne qualche regola non affatto incerta per le misure delle rifrazioni terrestri. Ma si avverta bene, non dover le osservazioni esser fatte nè alle prime nè alle ultime due ore del giorno; perchè allora la gran quantità dei vapori inegualmente sparsi nell' atmosfera altera di troppo le rifrazioni, e le rende affatto irregolari.

Ma un' altr' avvertenza è non men necessaria della precedente; cioè che la misura degli angoli dell' altezza e della depressione apparente sia fatta contemporaneamente da due diversi osservatori: perciocchè se la misura sarà fatta da un solo in tempi diversi, anche la densità dell' aria, e per conseguente la rifrazione sarà probabilmente diversa; e renderà falsa la supposizione, eh' ella accresca di tanto l'angolo d' altezza, di quanto diminuisce quel di depressione. Determinato con queste precauzioni il vero valore della rifrazione r , saran noti anche gli angoli dell' altezza vera $u - r$, e della vera depressione $d - \omega + r$. Ciò fatto anche un solo osservatore, misurando da una delle stazioni in tempi diversi ed a varie altezze degli strumenti meteorologici gli angoli d' altezza o di depressione apparente, potrà vedere quanta sia la diversità delle rifrazioni manifestata dalla diversità, che passa fra gli angoli apparenti ed il vero a lui già noto.

Eccone un esempio. Dalle grandi operazioni trigonometriche fatte dai nostri astronomi dell' osservatorio di Milano, supponendo il raggio terrestre di tese 3270000, risulta una distanza orizzontale di tese 19115 tra la sala dell' osservatorio ed il castel Baradello di Como. La lunghezza di un grado pel raggio 3270000 è di tese 57072 , 29; e l' angolo al centro pei due luoghi indicati si determina coll' analogia 57072 , 29 a 19115 come 60 al quarto; il qual trovasi = $0^{\circ} 20' 5'' , 4$.

Per mezzo delle osservazioni contemporanee fatte dai Sig. De Cesaris ed Oriani si è trovato, che il vero angolo d' elevazione della sommità della torre del castel Baradello sopra la sala dell' osservatorio è = $0^{\circ} 19' 13'' , 6$; ed io lo chiamerò ϕ . Ciò posto, se in tempi diversi e con molta varietà nelle altezze del barometro e del termometro si misureranno gli angoli dell' altezza apparente della cima della torre sopra la sala dell' osservatorio, e chiameransi ϕ' , ϕ'' , ϕ''' ec., le rifrazioni saranno $\phi' \pm \phi$; $\phi'' \pm \phi$; $\phi''' \pm \phi$, ec.; e queste divise per l' angolo al centro $20' 5'' , 4$ daranno altrettanti valori di $\frac{m}{n}$.

Il Sig. Giovanni Tobia Mayer figlio del celebre astronomo di questo nome nel capo XVI della sua Geometria pratica parlando delle rifrazioni terrestri si esprime in questi termini. „ Lo stato dell' atmo- „ sfera dipende dalle mutazioni di sua densità; e sic- „ come questa ci è indicata dal barometro e dal ter- „ mometro, così può dirsi, che la rifrazione dipende „ dallo stato del barometro e del termometro. Posto

„ che la rifrazione sia $\frac{1}{m}$ dell' angolo C (*cioè dell' angolo al centro*) io ho trovato, in conseguenza d'un' ipotesi, che non si scosta molto dal vero, che, quando nella stazione inferiore il barometro è a 28 pollici, i valori della frazione $\frac{1}{m}$ per diversi gradi del termometro di Réaumur sono i seguenti.

<i>Gradi del termometro</i>	<i>Valori di $\frac{1}{m}$</i>
- 10	$\frac{1}{15,6} = 0,06410$
0	$\frac{1}{16,4} = 0,06097$
+ 10	$\frac{1}{17,2} = 0,05814$
+ 20	$\frac{1}{18,0} = 0,05555$

„ I risultati di questa tavola si dovranno accrescere o diminuire secondo che il barometro sarà più o meno alto di 28 pollici.

E S E M P I O .

„ Qual parte dell' angolo C sarà la rifrazione quando nella stazione inferiore il termometro sia a 10 gradi sopra il ghiaccio, ed il barometro a pollici 27,5?

„ Siccome per $+10^{\circ}$ nel termometro il valore di $\frac{1}{m}$ è

„ $\frac{1}{17,2} = 0,05814$, così si dirà $28:27,5 = 0,05814:x$

„ e sarà $x = 0,05710$. Pel supposto stato dell'atmo-
 „ sfera sarà dunque la rifrazione $= 0,05710$ dell'an-
 „ golo C . „

Fin qui l'autore, il quale io bramerei, che non si fosse ristretto ad accennar soltanto l'ipotesi, sulla quale è fondata la sua regola ma avesse spiegato quale ella sia, ed a quali fondamenti appoggiata.

53. Il Sig. La Place alla pag. 273 vol. IV della Meccanica celeste ha date due formole per le rifrazioni terrestri. La prima calcolata nell'ipotesi del calor costante a tutte le altezze dell'atmosfera la fa

eguale ad $\frac{\omega}{8,5194}$ quando il termometro è alla tem-

peratura del ghiaccio che si scioglie, ed il barometro a pollici 28 linea 1. L'altra da lui calcolata per un'ipotesi più probabile intorno al calore a diverse al-

tezze nell'aria, è $\frac{\omega}{11,9003}$ allorchè il barometro ed il

termometro sono alle due altezze pur ora indicate. Prendendo una media fra le dodici dilatazioni dell'aria poste al num. 32, cioè $0,004878$, o più semplicemente $0,0049$ per ogni grado di Réaumur la seconda formola del Laplace darà i seguenti valori

di $\frac{m}{n}$.

T. II. P. II.

T A V O L A I.

<i>Gradi del termometro di Réaumur</i>	<i>Valori di $\frac{m}{n}$</i>
— 10	0 , 088147
0	0 , 084031
+ 10	0 , 079913
+ 20	0 , 075796

Trentatrè osservazioni fatte al Perù; 11 in Inghilterra; 8 in Italia; 7 in Lapponia; 21 in Austria; 5 al Capo di Buona speranza; e 12 in Francia diedero i seguenti risultati per le altezze medie del barometro e pei valori di $\frac{m}{n}$ tratti dal Giornale del Sig. Zach del mese di Maggio 1805.

T A V O L A II.

<i>Paesi</i>	<i>Barometro in pollici</i>	<i>Valori di $\frac{m}{n}$</i>
Perù	16 , 38	0 , 0378
Inghilterra	27 , 58	0 , 0724
Italia	24 , 052	0 , 0521
Lapponia	27 , 412	0 , 0650
Austria	25 , 789	0 , 0630
Capo	26 , 46	0 , 0690
Francia	26 , 46	0 , 0960

Io credo, che questi valori di $\frac{m}{n}$ appartengano al-

la temperatura del ghiaccio; onde altro non resta che di ridurli alla costante altezza barometrica di 28 pollici; il che si ottiene moltiplicandoli per la frazione

$\frac{A}{28}$; nella quale A esprime le altezze del barometro

registrate nella tavola. Fatta la riduzione i valori di

$\frac{m}{n}$ saranno come qui sotto.

T A V O L A III.

Perù	0 , 059537
Inghilterra	0 , 073503
Italia	0 , 069650
Lapponia	0 , 066394
Austria	0 , 066999
Capo	0 , 073616
Francia	0 , 101710
Medio	0 , 071687

Con questo medio, e colla dilatazione di 0,0049

al grado trovansi per $\frac{m}{n}$ i seguenti valori.

T A V O L A IV.

— 10	0 , 075200
0	0 , 071687
+ 10	0 , 068174
+ 20	0 , 064661

Ma io son d' avviso, che nelle misure geometriche delle altezze eseguite in diversi paesi convenga far uso dei valori di $\frac{m}{n}$ dati dalla tavola III per que' paesi medesimi o per quelli, che ne son meno distanti, anzichè del medio posto appiè della tavola. Con queste precauzioni si può sperare di trar dalla tavola un valore di $\frac{m}{n}$, che si avvicini quanto più puossi a quello, che avrà veramente avuto luogo in ciascun caso particolare. Dico *che si avvicini quanto più puossi*; perchè tra il valor medio dato dalla tavola per un paese particolare e quelli, che nello stesso paese realmente esistono in tempi e circostanze diverse e determinate si trova sempre una maggiore o minor differenza. Della qual cosa la ragion principale a me sembra consistere nella tacita supposizione, che farsi nel calcolar le tavole, cioè che la forza rifrattiva dell'aria sia sempre ed unicamente proporzionale alla sua densità indicata dal barometro e dal termometro; la qual supposizione è non di rado smentita

dall'esperienza. E quindi è, che nelle misure geometriche delle altezze, ed in quelle specialmente, in cui grande è l'angolo al centro, resterà sempre qualche incertezza. Imperciochè il solo mezzo, che noi ab-
biam di correggerla calcolandone la rifrazione quello

è di prendere il valore di $\frac{m}{n}$, che nella tavola III cor-

risponde al dato paese; e di renderlo proporzionale alla temperatura ed all'altezza barometrica date dall'osservazione. Ma se nelle circostanze particolari di questa sarà stata assai diversa la forza rifrattiva dell'aria, la quantità della rifrazione calcolata colla tavola riuscirà sensibilmente o maggiore o minor della vera. Eccone un esempio. Nelle osservazioni dell'Austria ne ha una tra Miskolg e Obelef; nella quale il ba-

rometro fu a pollici 26,6; $\frac{m}{n} = 0,093$; e l'angolo

al centro = 26', 81. Per l'Austria il valor medio di

$\frac{m}{n}$ è nella tavola III = 0,066999 a 28 pol. d'altez-

za barometrica. Dunque per pol. 26,6 si riduce a 0,063649, laddove per l'osservazione fu a 0,093. La differenza è 0,029351; la quale, moltiplicata per l'angolo al centro 26', 81, è = 0', 76845 = 46'', 11.

Vedrem fra poco che, se una differenza simile a questa avesse avuto luogo nella misura del monte Rosa, ne sarebbe nata nell'altezza calcolata coll'uso della tavola III una diminuzione di tese 10,7 su 2331,11; che è quasi un mezzo per cento.

Il Sig. Delambre, dopo aver detto alla pag. 99 de' suoi Metodi analitici per la determinazione d'un arco del meridiano, che il valore di $\frac{m}{n}$ varia col variar dello stato dell' atmosfera, soggiunge; non esser suo disegno d'entrare in un'esposizione minuta delle proprie osservazioni; ma bastargli il dire, che $\frac{m}{n}$ gli è parso in estate $= 0,075$; in primavera ed autunno $= 0,08$; ed in inverno da $0,09$ a $0,10$. Giusta la tavola III lo stesso valore è per la Francia $= 0,102$ alla temperatura zero; e, fatto il solito calcolo per la temperatura $10^\circ = 0,096$; e per la temperatura $20^\circ = 0,092$; cosicchè le differenze sono $0,02$; $0,016$; $0,017$. Ma i risultati del Sig. Delambre, essendo dedotti da un gran numero d'osservazioni, ch'egli dovette fare per la misura del meridiano, a me sembra, che meritin giustamente la preferenza.

A R T I C O L O III.

Misura delle altezze vere per mezzo dell'angolo d'elevazione.

59. Determinata ad un di presso la quantità della rifrazione, per determinare anche l'altezza vera $D b$, osservo che nel triangolo $A B b$ è noto l'angolo B ; e che l'angolo $B A b$ effetto della rifrazione

è $= \frac{m \omega}{n}$. Dunque nel triangolo $C A b$ avrem l'angolo

$$C A b = C A B - \frac{m \omega}{n}; \text{ e l'angolo } A b C = B + \frac{m \omega}{n}.$$

Ciò premesso ognun vede, che sarà

$$(E) \quad C b = \frac{C A \cos. (E A B - \frac{m \omega}{n})}{\text{sen.} (B + \frac{m \omega}{n})}.$$

Suppongasì col Lambert $\frac{m}{n} = \frac{1}{14}$, e nell'esempio I cioè in quel della torre della Matelotte l'angolo $E A B - \frac{m \omega}{n}$ sarà $= 8^{\circ} 27' 10'' - \frac{2' 18'', 94}{14} = 8^{\circ} 27' 0'', 08$; e l'angolo $B + \frac{m \omega}{n} = 81^{\circ} 30' 31'', 06 + \frac{2' 18'', 94}{14} = 81^{\circ} 30' 40'', 98$. In quest' esempio il calcolo sarà dunque

$$L \cos. (E A B - \frac{m \omega}{n}) = 9 . 9952596752$$

$$L C A = \frac{6 . 5147377}{16 . 5099973752}$$

$$L (B + \frac{m \omega}{n}) = 9 . 9952161136$$

$$L C b = 6 . 5147812616$$

$$C b = 3271758 , 358 ; D b = 328 , 358$$

Nel primo esempio l'altezza apparente DB si è trovata $= 328, 43$; di che segue, la rifrazione aver in questo caso accresciuta l'altezza di 72 millesimi di tesa giusta l'ipotesi del Lambert. Egli però non corregge le altezze quando l'effetto della rifrazione è minor d'una tesa.

Per l'esempio del Canigou abbiamo $\omega = 30' 11'', 12$;

$$\frac{\omega}{14} = 2' 9'', 37; \text{ e per conseguente } EAB - \frac{\omega}{14} = 2^{\circ}$$

$$34' 50'', 63; \text{ e } B + \frac{\omega}{14} = 86^{\circ} 54' 53'', 25. \text{ Fatto con}$$

questi dati il solito calcolo si trova $Cb = 3272843, 81$; e $Db = 1422, 31$. Ma senza considerar la rifrazione si è trovato $DB = 1439, 55$. La rifrazione ha dunque in questo caso accresciuta l'altezza di tese 17, 24. Il Lambert, fatto il calcolo colle sue formole, ha trovato l'accrescimento di 18 tese.

Alfine pel monte San Bartolomeo è $\omega = 55' 3'' 71$;

$$\text{ed } \frac{\omega}{14} = 3' 55'', 98. \text{ Quindi viene } EAB - \frac{\omega}{14} = 46' 4'', 02;$$

$$\text{e } B + \frac{\omega}{14} = 88^{\circ} 18' 52'', 27. \text{ E calcolando con questi}$$

dati nel modo solito si trova $Cb = 3272543, 91$; e $Db = 1122, 41$. L'effetto della rifrazione è dunque in questo caso di tese 60, 75. Il Lambert lo fece di 60.

L'angolo al centro è comune ai due triangoli CAB, Cab ; onde segue, che quest'angolo determinato per l'altezza apparente DB serve anche per la reale Db . Al num. 52 ho spiegato il modo di cal-

colarlo quando nel triangolo CAB è noto CA ed incognito CB ; ma se CB sarà noto ed incognito CA , l'angolo C determinerassi colla seguente analogia $CB : AB = \cos. EAB : \sin. C$.

Nell'equazione (E) posta qui sopra si ha il valor di Cb quando son noti CA , l'angolo apparente d'altezza EAB , e la frazione $\frac{m}{n}$. Ma se saran noti l'angolo, la frazione e Cb ; allora sarà $CA =$

$$\frac{Cb \sin. (B + \frac{mC}{n})}{\cos. (EAB - \frac{mC}{n})}. \text{ Finalmente anche la frazione } \frac{m}{n}$$

si determinerà nel modo seguente quando sian noti CA , Cb , e l'angolo EAB . Nell'equazione (E) sostituisco a B il suo valore $90^\circ - EAB - C$; e la

$$\text{cangio in } Cb = \frac{CA \cos. (EAB - \frac{mC}{n})}{\cos. (EAB - \frac{mC}{n} + C)}. \text{ Per sempli-}$$

cità maggiore sostituisco ϕ ad $EAB - \frac{mC}{n}$; e n'ho

$$Cb = \frac{CA \cos. \phi}{\cos. (\phi + C)}; \text{ e } \frac{\cos. (\phi + C)}{\cos. \phi} = \frac{CA}{Cb}. \text{ Sarà dun-}$$

$$\text{que } \frac{\cos. \phi \cos. C - \sin. \phi \sin. C}{\cos. \phi} = \frac{CA}{Cb}; \text{ e quindi } \cos. C -$$

$$\sin. C \tan. \phi = \frac{CA}{Cb}; \text{ e } \tan. \phi = \frac{\cos. C - \frac{CA}{Cb}}{\sin. C}. \text{ Con que-}$$

sto valor noto della tangente si troverà nelle tavole quello dell'angolo, che chiamerò v ; onde avrò $EAB -$

$$\frac{mC}{n} = v; \text{ ed in fine } \frac{m}{n} = \frac{EAB - v}{C}.$$

Illo detto al num. 57, che il miglior mezzo per determinar la quantità della rifrazione è quello di misurar con somma esattezza nel tempo medesimo gli angoli apparenti d'altezza e di depressione a, d in due stazioni d'altezza diversa, per le quali sia noto l'angolo al centro ω ; poichè la rifrazione è =

$$\frac{a + \omega - d}{2}. \text{ Ma questo metodo esige due osservatori;}$$

un de' quali in tempi diversi misuri alla stazion inferiore gli angoli dell'altezza apparente, e l'altro determini contemporaneamente alla stazion superiore quelli della depressione; il che ne rende sempre incomoda e spesso malagevole l'esecuzione. Ma se una sola volta con un buon istrumento, e colle precauzioni, di cui parlerò nell'ultimo articolo di questa sezione, si farà una livellazion esatta dall'una all'altra stazione; e se ne determinerà con precisione la differenza di altezza; un solo osservatore misurando poi dalla stazion inferiore gli angoli d'altezza, potrà per mezzo della formola precedente, in cui saran noti $CA; Cb; C$ ed EAB , determinar il valore di

$$\frac{m}{n}; \text{ e per conseguente la rifrazione } \frac{mC}{n}.$$

Se il calcolo delle altezze apparenti si fa col trian-

golo ABD esse trovansi colla formola del num. 53, che è

$$BD = \frac{AD \operatorname{sen.} (EAB + \frac{\omega}{2})}{\cos. (EAB + \omega)}.$$

Applicando anche a questa la correzion della rifrazione si avrà dunque

$$Bd = AD \operatorname{sen.} \frac{(EAB + \frac{\omega}{2} - \frac{m\omega}{n})}{\cos. (EAB + \omega - \frac{m\omega}{n})}$$

E nell'ipotesi del Lambert

$$Bd = \frac{AD \operatorname{sen.} (EAB + \frac{3\omega}{7})}{\cos. (EAB + \frac{13\omega}{14})}.$$

Si è veduto al num. 53, che per la torre della Matelotte la corda AD è = 2203, 58; e l'altezza DB non corretta dalla rifrazione = 328, 244; ma

calcolando colla rifrazione $\frac{\omega}{14}$ si troverà $EAB + \frac{3\omega}{7} =$

$8^{\circ} 28' 9''$, 55; ed $EAB + \frac{13\omega}{14} = 8^{\circ} 29' 18''$, 96. Or

questi valori sostituiti nella formola danno $Db = 328$, 137: cosicchè l'alzamento prodotto dalla rifrazione è poco più d'un decimo di tesa.

Pel Canigon il valore di Bd dedotto dalla formola è di tese 1421, 45; e l'effetto della rifrazione 1439 , 439 - 1421, 45 = 18, 039.

Pel monte S. Bartolomeo si trova $Bd = 1122$, 1836; e per conseguenza l'alzamento della rifrazione fu $1182, 1589 - 1122, 1836 = 59, 9753$.

Finalmente, se il calcolo delle altezze apparenti fassi col triangolo ABF , dopo d'aver determinato il valor di DB , si troverà quello eziandio di Bb calcolando il lato Bb nel triangolo ABb ; e sottraendolo poi da DB . Il calcolo è fondato sulla seguente analogia

$$\text{sen. } AbB : \text{sen. } BAb = AB : Bb,$$

ovvero (poichè BAb è $= \frac{m\omega}{n}$, ed $AbB = 180^\circ - B - \frac{m\omega}{n}$)

$$\text{sen. } (B + \frac{m\omega}{n}) : \text{sen. } \frac{m\omega}{n} = AB : Bb.$$

Per la torre della Matelotte abbiamo $\omega = 2' 18''$, 95, e secondo il Lambert $\frac{m\omega}{n} = \frac{\omega}{14} = 9''$, 92; $B + \frac{m\omega}{n} = 81^\circ 30' 40''$, 98; ed $AB = 2228$. Il valore di Bb si calcolerà dunque così

$$L \text{ sen. } \frac{m\omega}{n} = 5 \cdot 6819143$$

$$LAB = 3 \cdot 3479152$$

$$9 \cdot 0298295$$

$$L \text{ sen. } (B + \frac{m\omega}{n}) = 9 \cdot 9952161136$$

$$LBb = 9 \cdot 0346133864; Bb = 0, 1033.$$

Lo stesso calcolo dà pel Canigou $Bb = 18, 068$, e pel monte San Bartolomeo $Bb = 59, 908$. Le rifrazioni calcolate coi triangoli ADb , ABb son dunque sensibilmente uguali e tra loro e colle assegnate dal Lambert, che sono di tese 18, e 60. Ma il calcolo del triangolo CAb del num. 59 dà circa $\frac{3}{4}$ di tesa in meno pel Canigou; in più pel monte San Bartolomeo; ed io non saprei dire, onde nasca la differenza.

Questi esempj fanno veder chiaramente quanto l'effetto della rifrazione sia grande allorchè gli angoli al centro eccedono un mezzo grado; ma io ne aggiugnerò un altro; in cui quest'angolo fu alquanto maggiore d'un grado; e ne farò il calcolo quanto più potrò esattamente. Ci darà questo l'altezza d'uno de' più alti monti del nostro continente qual è il monte Rosa.

Il Sig. Abate Oriani dalla sala dell' osservatorio di Milano (situata alla latitudine $45^{\circ} 27' 59''$, e superior al mare di tese 77, 1) osservò l'angolo apparente d'elevazione della doppia punta piramidale del monte Rosa; e la trovò di $1^{\circ} 47' 39''$, 05 sendo il barometro a pol. 27 lin. 11, ed il termometro di Réaumur a gradi 18, 5. Io calcolerò quest'altezza primieramente col valor della rifrazione del Lambert, poi con quello della tav. III del numero precedente.

Dalle operazioni trigonometriche dei nostri Astronomi già menzionate risulta, che la vera distanza orizzontale del monte dall' osservatorio è di tese 59138. Si calcoli la lunghezza del grado per la latitudine

dell'osservatorio colla formola
$$C = \frac{\pi}{180^{\circ}} \cdot \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{3}{2}}};$$

e si troverà di tese 57011, 8; alla qual lunghezza corrisponde un raggio osculatore = 3266536, 09. A questo valor del raggio s'aggiungan tese 77, 1; delle quali la sala dell'osservatorio è superior al mare; e si avrà il lato CA del mio triangolo = 3266613, 19. L'angolo al centro si determina coll'analogia 57011, 8: 59133 = 60': x ; la quale dà $x = 62', 237 = 1^\circ 2' 14'', 2$.

Dunque, supposta col Lambert la rifrazione = $\frac{\omega}{14}$,

sarà questa = $0^\circ 4' 26'', 7$. Ora, essendo $EAB = 1^\circ 47' 39''$; $\omega = 1^\circ 2' 14'', 2$; si ha $B = 87^\circ 10' 6'', 8$.

Sarà dunque $EAb = EAB - \frac{\omega}{14} = 1^\circ 43' 12'', 3$; ed

$AbC = B + \frac{\omega}{14} = 87^\circ 14' 33'', 5$. Fatto il solito cal-

colo con questi valori degli angoli e con quello di CA troveremo $Cb = 3268926, 59$; e $Db = 2313, 41$.

Il Sig. Oriani ha calcolata la medesima altezza colla formola

$$Db = AD \frac{\text{sen.}(EAB + \frac{3\omega}{7})}{\text{cos.}(EAB + \frac{13\omega}{14})}$$

supponendo $CA = 3270000$; ed ha trovato $Db = 2312, 4$. Il suo risultato è dunque minor del mio d'una tesa su più di 2300.

Finalmente, per trovar la rifrazione colla tav. III del num. prec., osservo che per l'Italia il valore di

$\frac{m}{n}$ è 0,060652 alla temperatura zero. Dunque, facendo uso della dilatazione 0,0049 per grado, alla temperatura di 18°, 5, sarà 0,055154, e per l'altezza barometrica 27 po. 11 lin. ridurrassi a $\frac{335 (0,055154)}{336} =$

0,05499. Questo valore moltiplicato per quello dell'angolo al centro, cioè per 3734'', 2 ci dà la rifrazione 3' 25'', 34. Ciò posto $E A b$ è = 1° 44' 13'', 66; ed $A b C$ = 87° 13' 32'', 14; dai quali valori, fatto il solito calcolo, si deduce $C b$ = 3268944, 3; e $D b$ = 2331, 11.

Suppongasi ora, che come nell'osservazione dell'Austria, di cui poc' anzi ho parlato, anche in questa la forza rifrattiva dell'aria abbia superata quella della tavola di circa 0,029 cosicchè $\frac{m}{n}$ sia = 0,089654.

La medesima serie di calcoli fatta con questo valore

ci darà $\frac{m}{n} = 4' 11'', 1$; e l'altezza $D b$ = 2320, 41

minor dell'altra di tese 10, 7. Questa differenza non giugne al mezzo per 100 dell'altezza totale; ma è una delle maggiori; poichè rari sono i casi, in cui la forza rifrattiva dell'aria sia tanto diversa dalla media, o l'angolo al centro maggiore di un grado, com'è nel presente. Si avverta in fine, che, calcolando l'altezza senz'aver riguardo alla rifrazione, ella trovasi di tese 2389, 855: onde si fa manifesto quanto grande in questo caso sia l'effetto della rifrazione.

60. Agli esempj fin qui recati ne aggiungerò finalmente un altro in cui è l'angolo al centro e quelli d'altezza e di depressione, e per conseguenza anche il valore della rifrazione furon noti. Gli Accademici francesi spediti al Perù, affin di determinare qual sia sotto l'equatore la lunghezza d'un grado di latitudine, misurarono con un'estrema esattezza, ma con fatica grandissima la distanza orizzontale di *Carabourou* ad *Oyambaro*, cioè delle due estremità della base, che servì di primo lato a tutta la serie de' lor triangoli; e la trovarono di tese 6272, 77. Da questa, con un laborioso calcolo fatto sulle distanze, e su gli angoli d'altezza e di depressione di molti punti intermedi, ne conchiusero; che la lunghezza rettilinea della base in aria era di 6274, 05 tese. Il risultato delle grandi operazioni loro fu, che un grado terrestre di latitudine sotto l'equatore ed al livello di *Carabourou* è giusta il Sig. de la Condamine di tese 56770, 2. L'angolo al centro ω per le due estremità della ba-

se fu dunque $= \frac{(6272, 77) 60'}{56770, 2} = 6' 37'', 776$. Gli an-

goli d'altezza e di depressione, secondo la Condamine, furono $a = 1^{\circ} 6' 19''$, e $d = 1^{\circ} 11' 53''$. Sostituisco tutti questi valori nella formola della rifrazione;

e n' ho $r = \frac{\omega + a - d}{2} = 31'', 888$. Questa rifrazione

corrisponde a 0, 08 dell'angolo al centro, ed è veramente alquanto grande rispetto alla rarità dell'aria pel livello di *Carabourou*, ed alla temperatura, che

vi regna; ma non può nondimeno dirsi assolutamente eccessiva?

„ Gli angoli di depressione e di altezza, dice il
 „ Sig. Bouguer, erano alquanto soggetti a cambiare
 „ per l'irregolarità delle rifrazioni terrestri, che le
 „ circostanze locali rendevano ancor più variabili. Es-
 „ sendo noi tutti insieme a Carabourou estremità set-
 „ tentrionale trovammo l'elevazion d'Oyambaro estre-
 „ mità australe di $1^{\circ} 6' 9''$; ed un altro giorno il Sig.
 „ de la Condamine, Don Antonio de Ulloa ed io, es-
 „ sendo soli ad Oyambaro osservammo la depressione
 „ di Carabourou di $1^{\circ} 12' 20''$. Il Sig. Godin ha cre-
 „ duto dappoi, dover piuttosto attenersi ai due nu-
 „ meri $1^{\circ} 6' 30''$, ed $1^{\circ} 11' 35''$. „

In quest'incertezza io prenderò una media fra le tre determinazioni; la qual mi darà $a = 1^{\circ} 6' 19''$, 333; $d = 1^{\circ} 11' 56''$; ed $r = 30''$, 554. Per calcolar l'altezza d'Oyambaro sopra Carabourou abbiám dunque i dati seguenti: $EAB = 1^{\circ} 6' 19''$, 333; $\omega = 6' 37''$, 776; $B = 88^{\circ} 47' 2''$, 891; $r = 30''$, 554; ed AB lunghezza della base in aria = 6274,05. Resta da determinarsi il valor di CA raggio osculatore per l'estremità inferior della base. Or questo si ottiene assai facilmente,

poichè il detto raggio debb' essere $= \frac{180^{\circ} \cdot 56770,2}{\pi}$;

e per conseguente $LR = L 180^{\circ} + L 56770,2 - L \pi = 6.5122430$; al qual logaritmo corrisponde il numero 3252691,79.

Dai valori di EAB , di B , e di r vengono $Eab = 1^{\circ} 5' 48''$, 779; ed $AbC = 88^{\circ} 47' 33''$, 444; e ciò
 T. II. P. II.

posto calcolo come segue

$$L \cos. E A b = 9 . 9999204488$$

$$L C A = 6 . 5122430$$

$$16 . 5121634488$$

$$L \sin. A b C = 9 . 9999035722$$

$$L C b = 6 . 5122598766$$

$$C b = 3252818 , 48 ; D b = 126 , 69 \text{ tese.}$$

Il Sig. Bouguer ha scritto in più luoghi, che quest' altezza è di circa 126 tese. Anche la Condamine l' ha detta di 126 tese; ma nel suo profilo della base si vede, ch' egli ha sempre neglimentate le frazioni.

Facendo il calcolo colla formola del num. 58

$$D b = \frac{A D \sin. (E A B + \frac{\omega}{2} - r)}{\cos. (E A B + \omega - r)}$$

troveremo $L A D = L \sin. (0^{\circ} 3' 18'', 888) + L 2 + L C A = 3 . 7974559$; $L D b = L A D + L \sin. (1^{\circ} 8' 56'', 333) - L \cos. (1^{\circ} 12' 15'', 221) = 2 . 0997135$; e $D b = 125 , 81$.

Finalmente col calcolo del triangolo ABF si trova $bd = 120 , 104$; $dD = 5 , 9567$; e per conseguente $Db = 126 , 0607$; cioè il valor medesimo, che fu assegnato dai due accademici; poichè la differenza è minore di 61 millesimi di tesa. Anche la media delle tre altezze poste quì sopra, cioè 126, 1869 è ben poco diversa.

Nell' esempio presente, e più generalmente ogni

volta che l'angolo al centro e quelli d'altezza e di depressione son noti, il valore dell'angolo d'altezza corretto dalla rifrazione, cioè EAb è uguale ad

$\frac{a + \omega - d}{2}$. Imperciocchè, chiamati a', d' gli angoli non

apparenti ma veri d'altezza, e di depressione, sarà $a' = a - r$; e $d' = d - \omega + r$; e quindi $a' + d' = a + d - \omega$; e perchè d' non è diverso da a' quando le misure sono esatte, $2 a' = a + d - \omega$, ed $a' =$

$$\frac{a + d - \omega}{2}.$$

Si sostituiscano in questa formola i valori di a, d, ω posti qui sopra; e si troverà $a' = 1^\circ 5' 48''$, 7785, cioè il valor medesimo di EAb , che abbiain trovato calcolando la rifrazione.

61. Ho parlato più volte delle correzioni, che il Sig. Lambert ha fatte per conto delle rifrazioni alle altezze dei monti calcolate dal Sig. Cassini. Siffatte correzioni son fondate sul teorema xxxiii, e sul problema xiv dell'opera già citata del Lambert sul sentiero della luce nell'aria. Nel teorema dimonstrasi per approssimazione che (supposta circolare presso la Terra la curva di rifrazione, chiamato R il raggio del cerchio di rifrazione; cui l'autore dà il nome di *raggio orizzontale*, ed espresso coll'unità il raggio terrestre) gli oggetti, che nella livellazione si veggon nella tangente o retta orizzontale sono alzati dalla rifrazione

della quantità $\frac{\sec. \omega - 1}{R}$ esprimendo al solito per ω

l'angolo al centro. Nel problema stabilisce che, se dalla distanza apparente della sommità d'un monte dal centro terrestre si sottrae il prodotto della quantità precedente nella cosecante della distanza apparente della cima del monte dal zenit, nel residuo hassi la distanza vera, cioè corretta dalla rifrazione. Egli aggiunge poi nell'osservazion prima, che nelle misure dei monti quella cosecante è quasi sempre vicinissima all'unità; onde segue, che le altezze calcolate senza riguardo alla rifrazione si correggono diminuendole

della quantità $\frac{\sec. \omega - 1}{R}$.

Se la rifrazione è espressa da $\frac{m \omega}{n}$ il raggio orizzontale diviene $\frac{n}{2 m}$; e quindi la correzion si riduce a $\frac{2 m (\sec. \omega - 1)}{n}$; o meglio, chiamando r il raggio terrestre, $\frac{2 m r (\sec. \omega - 1)}{n}$.

Nella fig. I la quantità $r (\sec. \omega - 1)$ è $= d D$. Si aggiunga, che, come abbiain veduto alla fine del num.

54, a $d D$ si può sostituire $\frac{\overline{A F^2}}{2 r}$. Ora, calcolando col

triangolo ABF , questo valore di $d D$ fa trovare l'altezza non corretta dalla rifrazione. Dunque, ponendo

in uso la correzione del Lambert, ad $\frac{\overline{A F^2}}{2 r}$ si sostitui-

rà $\frac{\overline{AF}^2}{2r} - \frac{2m \overline{AF}^2}{2nr}$. Affin d'avere un'espression più sem-

plice io suppongo questo binomio $= \frac{\overline{AF}^2}{2r+x}$; e ne for-

mo un'equazione; per cui mezzo trovo $x = \frac{4mr}{n-2m}$.

Il valore di dD , dal qual dipende la correzion del-

la rifrazione, è dunque $\frac{\overline{AF}^2}{2r + \frac{4mr}{n-2m}} = \frac{(n-2m) \overline{AF}^2}{2nr}$.

Se la rifrazione fosse un decimo dell'angolo al centro, essendo allora $m = 1$, $n = 10$, ne verrebbe

$dD = \frac{\overline{AF}^2}{2r + \frac{2r}{4}}$ formola data dal celebre astronomo

Maskelyne per la suddetta ipotesi di rifrazione. Ma per quella del Lambert cioè d'un quattordicesimo

dell'angolo al centro sarebbe $dD = \frac{\overline{AF}^2}{2r + \frac{2r}{6}}$.

62. Oltre alla correzion della rifrazione dovrebbe talvolta farsi anche quella della deviazione della retta orizzontale apparente dalla vera prodotta dall'attrazione dei monti quando appiè di questi si misura l'angolo d'elevazione. Ma come determinare la quantità di questa deviazione? Rarissimi sarebbero i casi, ne'

quali ciò potesse ottenersi con un' osservazion attuale, e non senza difficoltà nell' esecuzione. Nè da quelle, che Bouguer e la Condamine fecero al Perù, e Maskelyne in Iscozia si può dedurre alcuna regola da applicarsi ai casi particolari.

Quando il Cassini, per esempio, da Collioure prese l'angolo d'altezza della torre della Matelotte egli aveva alle spalle il mare ed a fronte i Pirenei; l'attrazion de' quali deve superar quella delle acque del Mediterraneo, e può aver un rapporto sensibile alla totale attrazion della Terra. Ma la quantità della deviazione, che quest'attrazione può cagionare è affatto incerta. Il Sig. Maskelyne l'ha trovata di 5", 8 al monte Scheallien. Supponendo (ma sol per dare un esempio della correzione, che dovrebbe farsi all'angolo d'elevazione, non perchè la supposizione sia probabile) che l'attrazione de' Pirenei a Collioure fosse doppia di quella del monte di Scozia, mettiamola di 12 secondi. In tal caso l'angolo d'altezza osservato debb'essere accresciuto di 12", e portato ad 8° 27'

22". Da questo cangiamento viene $\frac{B + C}{2} = 40^{\circ} 46' 19''$;

e $B = 81^{\circ} 30' 19''$. Calcolata con questi dati l'altezza si trova $CB = 3271759, 17$; e $DB = 329, 17$ in luogo di 328, 43; cosicchè alla supposta deviazione di 12" corrisponde nell'altezza un accrescimento di $\frac{3}{4}$ di tesa.

Fatte le supposizioni medesime pei monti Canigou e S. Bartolomeo, e con queste calcolate le altezze loro, troverebbesi quella del primo accresciuta di

tese 3, 98; e quella del secondo di 3, 09. Questi esempi, ne' quali ho supposta l'attrazione de' Pirenei, che poco a poco s'innalzano allontanandosi dal mare, certamente assai maggiore del vero, bastano per dimostrare, che nei casi ordinarii assai piccolo è l'effetto dell'attrazione dei monti; e che difficilissimo, per non dir impossibile riuscirebbe il determinarlo in ogni caso particolare. Nei risultati dei calcoli delle altezze resterà dunque qualche piccola incertezza ogni volta che abbiassi alcun fondamento di credere, che l'angolo osservato d'altezza possa esser dall'attrazione dei monti vicini sensibilmente alterato.

A R T I C O L O I V.

Misura delle altezze vere per mezzo degli angoli di depressione.

63. I metodi fin quì esposti suppongono, che le altezze si misurin dal basso all'alto prendendo gli angoli d'elevazione. Ma la misura può eseguirsi anche dall'alto al basso per mezzo degli angoli di depressione.

Sia A (fig. II) un luogo più alto di B ; AD la tangente del circolo osculatore del punto A ; e DAb l'angolo di depressione, sotto il quale il punto B alzato dalla rifrazione si vede in A . Sia in oltre C il centro del circolo osculatore; ed esprimasi al solito per $\frac{mC}{n}$ l'angolo di rifrazione BAb . Chiamato ϕ l'angolo osservato di depressione DAb avremo

$DAB = \phi + \frac{mC}{n}$; $CAB = 90^\circ - \phi - \frac{mC}{n}$; $ADC = 90^\circ - C$; e $CBA = 90^\circ + \phi - C + \frac{mC}{n}$. Ora nel triangolo CAB è $CB : CA = \text{sen. } CAB : \text{sen. } CBA = \cos. (\phi + \frac{mC}{n}) : \cos. (\phi - C + \frac{mC}{n})$; e da quest' analogia deducesi l' equazion seguente

$$(E) \quad CA = \frac{CB \cos. (\phi - C + \frac{mC}{n})}{\cos. (\phi + \frac{mC}{n})}.$$

Ho già fatto osservare, che l'angolo al centro C è lo stesso pei due triangoli CAB , CAb . Se CA è cognito, saran noti nel triangolo CAb i due lati CA , Ab coll'angolo da essi compreso $= 90^\circ - \phi$; e con questi dati si calcolerà l'angolo al centro. Se è noto CB , il suo valore potrà, senz'alcun sensibil errore nel risultato del calcolo, sostituirsi a quello di Cb . Sarà dunque $Cb : Ab = \cos. \phi : \text{sen. } C$. Determinato il valor di C , la formola precedente darà quello di CA quando è noto CB , e quello di CB se è noto CA .

Ne serva d'esempio l'altezza del monte Canigon. Abbiám veduto al num. 52, che l'angolo dell'altezza apparente di questo monte sopra la stazione inferiore (distante giusta il Cassini di tese 3271421, 5 dal centro della terra) fu $= 2^\circ 37' 0''$; e l'angolo al centro $30' 11''$, 12. Vediam ora qual sarebbe stato l'an-

golo della depressione apparente se un altro osservatore dalla cima del monte l'avesse misurato nel tempo medesimo, in cui fu preso l'angolo d'elevazione. Pel num. 57 chiamando a , d gli angoli apparenti d'altezza e di depressione, ω l'angolo al centro, ed r quel di rifrazione, il rapporto di queste quantità è espresso dalla formola $a - r = d - \omega + r$; per la quale vien ad esser $d = a + \omega - 2r$.

Supponendo $r = \frac{\omega}{14}$ avremo $d = 2^\circ 37' + 30' 11'', 12 -$

$\frac{30' 11'', 12}{7} = 3^\circ 2' 52'', 39$. Questo è dunque il valo-

re di ϕ , il quale, sostituito con quelli di C ed $\frac{m}{n} =$

$\frac{1}{14}$ nell'equazione (E) la riduce a $CA = 3271421, 5$

$\cos. \frac{(2^\circ 34' 50'', 635)}{\cos. (3^\circ 5' 1'', 755)} = 3272843, 81$; e quindi, presa

$CA' = CB$; l'altezza $A'A$ è $= CA - CB = 1422, 31$ te., quale appunto l'abbiam trovata al num. 59.

Applichiam ora la formola ad un caso, in cui l'angolo di depressione fu veramente osservato; ma, come vedremo, con poca esattezza. Dalla sommità del Monbianco; ove il barometro era a linee 192, 9; ed il termometro a gradi di Réaumur $-2, 3$; il Sig. de Saussure disse d'aver misurato l'angolo della depressione apparente del monte Rosa, e trovarlo di 30 minuti. L'angolo al centro per la sommità dei due monti si determina per mezzo della lor situazione geografi-

ca in longitudine e latitudine. Il Sig. Abate Oriani ha calcolata l'una e l'altra per la sommità del monte Rosa; ed ha trovata la longitudine $= 25^{\circ} 32' 17''$, 1; e la latitudine $= 45^{\circ} 55' 56''$, 1. Il suo calcolo è nel giornale del Sig. Zach, Giugno 1798, e tradotto in nostra lingua nel vol. XX degli Opuscoli scelti di Milano pag. 379, 380. Nel vol. X degli stessi Opuscoli scelti pag. 242 leggesi la seguente nota., In un foglietto recentemente stampato dal Sig. Bourrit sopra un suo viaggio nelle alpi si trova la seguente notizia. Il Sig. Baufoix inglese Astronomo e Fisico nel giorno 9 Agosto dell'anno corrente pervenne alla cima del Monbianco, ne misurò la latitudine, e la determinò a $45^{\circ} 50' 11''$., Nella carta del Sig. Pictet pubblicata nel secondo vol. dei Viaggi del Sig. de Saussure il Monbianco è posto presso a poco alla stessa latitudine, ed alla longitudine $45'$ all'est di Ginevra; la cui longitudine è $23^{\circ} 49'$. Quella del Monbianco sarà dunque $24^{\circ} 34'$. L'arco del chiesto angolo al centro è per conseguenza il terzo lato d'un triangolo sferico; di cui son noti due lati coll'angolo intercetto. I lati sono $44^{\circ} 9' 49''$; $44^{\circ} 4' 4''$ distanze dal polo; e l'angolo $58' 17''$ differenza delle longitudini. Con questi dati faremo il seguente calcolo. Sia P il polo (fig. III), B ed R le cime dei monti Bianco e Rosa. Sarà dunque $PR = 44^{\circ} 4' 4''$; $PB = 44^{\circ} 9' 49''$; e l'angolo intercetto $\phi = 58' 17''$. Si tiri da R l'arco perpendicolare RS ; e per le note regole della trigonometria sferica sarà $\text{tang. } PS =$

$$\frac{\cos. \phi \text{ tang. } PR}{r} . \text{ Ciò posto avremo}$$

$$\begin{array}{r}
 L \cos. \phi = 9.9999376 \\
 L \tan. PR = 9.98586524 \\
 \hline
 19.98580284 \\
 - 10. \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 L \tan. PS = 9.98580284; PS = 44^\circ 3' 49'', 18; SB = \\
 PB - PS = 5' 59'', 82.
 \end{array}$$

Sarà in oltre $\cos. BR = \frac{\cos. SB \cos. PR}{\cos. PS}$; e per conseguente

$$\begin{array}{r}
 L \cos. SB = 9.9999993 \\
 L \cos. PR = 9.85643738 \\
 \hline
 19.85643663 \\
 L \cos. PS = 9.8564676 \\
 \hline
 L \cos. BR = 9.9996908; BR = 0^\circ 41''.
 \end{array}$$

Allo stesso risultato si giugne calcolando il valore di BR colla formola seguente. Sia $PB = A$, $PR = a$, e l'angolo intercetto ϕ . Chiamato x l'arco BR sarà

$$\text{sen. } \frac{x}{2} = \sqrt{(\text{sen. } A \text{ sen. } a \text{ sen.}^2 \frac{\phi}{2} + \text{sen.}^2 \frac{A-a}{2})}.$$

Ecco il calcolo di questa formola, di cui darò la di-

mostrazione nella nota (a) posta in fine di quest'articolo .

$$L \text{ sen. } A = 9 . 84305183$$

$$L \text{ sen. } a = 9 . 84230062$$

$$L \text{ sen}^2 . \frac{\Phi}{2} = 15 . 8578706$$

$$5 . 54322305$$

$$\text{Numero corrispondente} \quad 0 , 0000349320$$

$$L \text{ sen}^2 . \frac{A - a}{2} = 13 . 8447242$$

$$\text{Numero corrispondente} \quad 0 , 000006994$$

$$\text{Somma} = 0 , 0000356314$$

$$L 0,0000356314 = 15 . 5518329$$

$$\text{Sua metà} = 7 . 7759164 = L \text{ sen. } \frac{x}{2} ; \frac{x}{2} = 20' 31'' ;$$

$x = 41' 2''$. Questo valore supera dunque quello del calcolo precedente di 2 soli secondi, o di 8 millesimi di $41'$.

Per l'ottima osservazione dell'Abate Oriani da me calcolata al num. 59 la cima del monte Rosa è superiore alla sala dell'osservatorio di Milano di tese 2331 , 11; alle quali aggiunte altre 77 , 1 ne risultano 2408 , 21 per l'altezza sopra il livello del mare. Già si è visto nel numero citato, che il raggio osculatore per la sala dell'osservatorio è di tese 3266536 , 09;

di che segue, esser $C B = 3268944, 3$. Nel presente caso abbiain dunque

$$C A = 3268944, 3 \cos. \frac{(30' + \frac{m}{n} 41' - 41')}{\cos. (30' + \frac{m}{n} 41')}.$$

In quest' equazione il valor di $C A$ non può esser noto finchè quello della frazione $\frac{m}{n}$ resta incognito. Ora il valore di questa frazione dipende da due elementi, cioè dalla temperatura, ch' ebbe l' aria alla cima del monte Rosa quando fu osservato l' angolo di depressione, e dall' altezza, che quivi avrebbe avuta il barometro se stato ci fosse. Ma, poichè la differenza d' altezza in questi due monti è certamente d' un picciol numero di tese, io supporrò senz' alcun pericolo d' errore, che uguali presso a poco fossero in ambo i monti la temperatura e l' altezza barometrica, e che anche alla sommità del monte Rosa il termometro sarebbe stato $\alpha - 2^\circ$, ed il barometro a lin. 191, 9.

Il Monte Rosa è presso a poco ai confini d' Italia e di Francia; ond' io nella terza tavola delle rifrazioni prenderò per $\frac{m}{n}$ un valor medio fra quegli degli anzidetti paesi, cioè 0, 081181, e per $- 2$ gradi 0, 081976. Dunque per lin. 191, 9 d' altezza barometrica sarà $\frac{191,9(0,081976)}{336} = 0, 046819$. Da que-

sto valore vien poi $\frac{m}{n} 41' = 1' 54''$; e quindi l'equazio-

ne si cangia in $CA = 3268944,3 \frac{\cos.(-9' 6'')}{\cos.(31' 54'')} = 3269073,31$;

onde viene $CA - CB = 129,01$ tese. La cima del Monbianco sarebbe dunque superiore a quella del monte Rosa di tese 129; il che non può in verun conto accordarsi colle altezze dal medesimo Sig. de Saussure assegnate ai due monti, sopra il livello del mare, le quali sono 2450 pel Bianco, e 2430 pel Rosa; cosicchè la differenza è di 20 tese in luogo di 129.

Dalle misure del Monbianco de' Signori Shuckburg e Pictet risulta come vedremo nella sezione II articolo II un' altezza media di tese 2420,26 sopra il livello del mare; per la quale il monte Bianco viene ad esser più alto del Rosa nulla più che di 12 tese. Ora, supposte esatte queste misure, sarà $CA = CB + 12 = 3268956,3$. Partendo da questo dato, e chiamato x l'angolo incognito di depressione, egli potrà determinarsi colla formola

$$\frac{CA}{CB} = \cos. \frac{(x + \frac{mC}{n} - C)}{\cos.(x + \frac{mC}{n})}; \text{ e, sostituito } y \text{ ad } x + \frac{mC}{n},$$

$$\frac{CA}{CB} = \cos. \frac{(y - C)}{\cos. y} = \frac{\cos. y \cos. C + \sin. y \sin. C}{\cos. y} = \dots$$

$\cos. C + \sin. C \tan. y$; dalla qual equazione deducesi

$$\tan. y = \frac{\frac{CA}{CB} - \cos. C}{\sin. C} = \frac{1,00000367 - \cos. 41'}{\sin. 41'}.$$

Ecco il calcolo di quest' equazione

$$L \cos. 41' = 9.999691$$

Numero corrispondente 0,99992884

Numeratore della frazione 0,00007483

$$L 0,00007483 = 5.8740757$$

$$\text{comple. } L \sin. 41' = 1.9235003$$

$$L \tan. y = 7.7975760; y = 21' 34''.$$

Ma x è $= y - \frac{mC}{n}$; ed $\frac{mC}{n} = 1' 54''$. Sarà dunque

$x = 19' 40''$ non $30'$ come disse d' averlo trovato il Sig. de Saussure. (a)

(a) La formola $\sin. \frac{x}{2} = \sqrt{(\sin. A \sin. a \sin.^2 \frac{\Phi}{2} + \sin.^2 \frac{A-a}{2})}$ ser-

ve, come abbiain veduto a calcolare un triangolo, di cui sian noti due lati coll' angolo da essi compreso; e fra poco dimostrerò, che sen deducano anche le formole, che esprimon i tre angoli quando son noti i tre lati. Io so bene, che i calcoli di tutte queste formole son più lunghi di quelli delle antiche regole della trigonometria sferica, e più ancora di quelli delle formole elegantissime dell' Eulero; e non ignoro, che non sarebbero in pratica di verun uso. Ho creduto non pertanto di far cosa grata al lettore comunicandogli una formola, che ha la singolarità d'esser fondata sulla considerazione dei circoli paralleli all' equatore, e nella trigonometria sferica non usati. Eccone la dimostrazione.

Nel triangolo sferico PQO (fig. IV); nel quale considero P come il polo, e PQ , PO come due archi di meridiano, sia $PQ = A$, $PO = a$,

A R T I C O L O V.

Della depressione dell' orizzonte marino.

64. Se la visuale Ab è perpendicolare a Cb , i due triangoli CAD , DAb son simili, e gli angoli C , e DAb eguali tra loro; vale a dire, che C in questo caso è $= \phi$. Or ciò avviene esattamente allorchè da un punto qualunque A superior al mare se ne osserva l'estremità apparente b , e l'angolo DAb rappresenta la depressione dell'orizzonte visibil del mare. Allor dunque, essendo $C = \phi$, la mia formola

e l'angolo intercetto $= \phi$. Si conducano pei punti Q , O due cerchi paralleli all'equatore, e siano MO , QN le corde dei due archi eguali de' meridiani; QM , NO le corde degli archi dei paralleli. Sian A , B i punti d'intersezione dei paralleli coll'asse. Il raggio BQ del parallelo del punto Q sarà $= \text{sen. } A$; il raggio AO del parallelo del punto $O = \text{sen. } a$; ed AB distanza dei due paralleli sarà $= \cos. a - \cos. A$. Le due corde dei meridiani MO , QN egualmente inclinate all'asse lo taglieranno nello stesso punto R , le cui distanze da B ed A saranno

$$BR = \frac{(\cos. a - \cos. A) \text{sen. } A}{\text{sen. } A - \text{sen. } a}$$

$$AR = \frac{(\cos. a - \cos. A) \text{sen. } a}{\text{sen. } A - \text{sen. } a}.$$

Le due corde MO , QN prolungate formano dunque il triangolo isoscele QMR ; ed in questo la retta NO è parallela alla base QM . Nel trapezio $QMON$ gli angoli opposti saran dunque uguali a due retti; ed esso potrà per conseguente iscriversi al circolo. Dunque per la nota proprietà dei quadrilateri iscritti al circolo sarà il prodotto delle sue diagonali uguale alla somma dei prodotti dei lati opposti; ossia, poichè le diagonali son eguali tra loro, ed eguali pur le due corde dei meridiani, sarà $\overline{QO}^2 = QM \cdot NO + \overline{MO}^2$. Ora QM corda dell'arco ϕ in un cerchio, che ha per rag-

cangiasi in $CA = \frac{CB \cos. \frac{m\phi}{n}}{\cos. (\phi + \frac{m\phi}{n})}$; ed in essa CB espri-

me il raggio osculatore della latitudine del luogo, in cui fassi l'osservazione.

Col mezzo di questa formola si determinerebbe esattamente l'altezza dei luoghi, dai quali può misurarsi la depressione dell'estremità apparente del mare, se fosse ben nota la vera quantità dell'angolo di

gio $\text{sen. } A \text{ è } = 2 \text{ sen. } A \text{ sen. } \frac{\phi}{2}$; e similmente la corda NO è $= 2 \text{ sen. } a$

$\text{sen. } \frac{\phi}{2}$; MO corda dell'arco $\frac{A-a}{2}$ d'un circolo massimo è $= 2 \text{ sen.}$

$\frac{A-a}{2}$. Ciò posto sarà

$\overline{QO}^2 = 2 \text{ sen. } A \text{ sen. } \frac{\phi}{2} \times 2 \text{ sen. } a \text{ sen. } \frac{\phi}{2} + 4 \text{ sen.}^2 \frac{A-a}{2}$; e finalmente

$QO = 2 \sqrt{(\text{sen. } A \text{ sen. } a \text{ sen.}^2 \frac{\phi}{2} + \text{sen.}^2 \frac{A-a}{2})}$. Si osservi, che QO

è la corda del terzo lato del triangolo sferico PQO , ed, espresso questo

lato per x , si vedrà tosto dover essere $2 \text{ sen. } \frac{x}{2} = QO$; ed in fine

$\text{sen. } \frac{x}{2} = \sqrt{(\text{sen. } A \text{ sen. } a \text{ sen.}^2 \frac{\phi}{2} + \text{sen.}^2 \frac{A-a}{2})}$, come si dovea di-

mostrare.

Sia $PQ = a$, $PO = b$, $QO = c$; e sieno gli angoli $P = m$, $O = n$, $Q = p$. In ogni triangolo sferico qualunque angolo si può prender per polo; e quindi considerati successivamente come tali gli angoli P, O, Q ne avremo le tre formole seguenti.

T. II. P. II.

rifrazione, ossia del valore di $\frac{m}{n}$; per cui deve moltiplicarsi l'angolo al centro, che in questo caso è uguale a quel di depressione. Ma noi già abbiám osservato quanto incerta e variabile sia la legge delle rifrazioni terrestri, e se tale non fosse nell'aria del continente, potrebbe ancora esser dubbiosa in quella, che sta sopra ad un vasto spazio di mare. Per determinar la legge (se alcuna ve n'ha, di queste rifrazioni, ch'io chiamerei *marittime*, converrebbe da varii luoghi, de' quali fosser note le altezze sopra il livello del mare fra loro assai diverse, fare un gran numero d'osservazioni sull'abbassamento dell'orizzonte marino; e col-

$$\text{I} \quad \text{sen.}^2 \frac{c}{2} = \text{sen. } a \text{ sen. } b \text{ sen.}^2 \frac{m}{2} + \text{sen.}^2 \frac{a-b}{2}$$

$$\text{II} \quad \text{sen.}^2 \frac{a}{2} = \text{sen. } b \text{ sen. } c \text{ sen.}^2 \frac{n}{2} + \text{sen.}^2 \frac{b-c}{2}$$

$$\text{III} \quad \text{sen.}^2 \frac{b}{2} = \text{sen. } a \text{ sen. } c \text{ sen.}^2 \frac{p}{2} + \text{sen.}^2 \frac{a-c}{2}.$$

E da queste tre formole se ne deducou facilmente tre altre, che danno gli angoli per mezzo dei lati; le quali sono

$$\text{IV} \quad \text{sen.}^2 \frac{m}{2} = \frac{\text{sen.}^2 \frac{c}{2} - \text{sen.}^2 \frac{a-b}{2}}{\text{sen. } a \text{ sen. } b}$$

$$\text{V} \quad \text{sen.}^2 \frac{n}{2} = \frac{\text{sen.}^2 \frac{a}{2} - \text{sen.}^2 \frac{b-c}{2}}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}$$

$$\text{VI} \quad \text{sen.}^2 \frac{p}{2} = \frac{\text{sen.}^2 \frac{b}{2} - \text{sen.}^2 \frac{a-c}{2}}{\text{sen. } a \text{ sen. } c}.$$

la formola precedente, in cui sarebber noti i valori di CA , di CB , e di ϕ , determinar quelli di $\frac{m}{n}$. Ora col solito metodo troveremo, che dalla formola si deduce

$$\tan. \frac{m\phi}{n} = \frac{\cos. \phi - \frac{CB}{CA}}{\sin. \phi}; \text{ e quindi in ciascun caso parti-}$$

colare si trarrà il valore di $\frac{m\phi}{n}$; il quale diviso per ϕ

darà il valore di $\frac{m}{n}$.

Il Cassini osservò la depressione apparente dell'orizzonte marino dall'alto della torre di Sant'Elmo vicino a Collioure; e trovòlo di 26' 20". L'altezza di questa torre sopra il livello del mare calcolata coi dati dell'osservatore ma col raggio osculatore della latitudine 43° è di tese 101, 84 altezza, che supera d'un solo terzo di tesa quella del Cassini calcolata col suo raggio 3271420. Ora, se determineremo l'altezza col-

$$\text{la formola } CA = \frac{CB \cos. \frac{m\phi}{n}}{\cos. (\phi + \frac{m\phi}{n})} \text{ supponendo col Lam-}$$

$$\text{bert } \frac{m}{n} = \frac{1}{14}, \text{ avremo } \frac{m\phi}{n} = 1' 52'', 86; \text{ e } \phi + \frac{m\phi}{n} =$$

28' 12'', 86. Colla sostituzione di questi valori troveremo $CA = 3265392, 82$; ed $A'A = CA - CB =$

3265392 , 82 — 3265283 , 46 = 109 , 36 altezza , che supera la data di tese 7 , 52; o più di $7 \frac{1}{3}$ per 100.

Quì dunque il supposto valore di $\frac{m}{n}$ è smentito

dall' osservazione; ond' io, per determinare qual veramente e' sia stato, il calcolerò colla formola

$$\tan. \frac{m\phi}{n} = \frac{\cos. \phi - \frac{CB}{CA}}{\sin. \phi}. \text{ In questo caso abbiamo } CB =$$

$$3265283 , 46; CA = CB + 101 , 84 = 3265385 , 3; e$$

$$\phi = 26' 20''. \text{ Da questi dati mi viene } L \tan. \frac{m\phi}{n} =$$

$$6 . 3945259; e per conseguente \frac{m\phi}{n} = 51''; ed \frac{m}{n} =$$

$$\frac{51''}{26' 20''} = 0 , 03228 = \frac{1}{30,93} \text{ valor ben lontano da } \frac{1}{14}.$$

Il medesimo Astronomo osservò la depressione dal piè della torre della Massane; e la trovò di 50'20''. L' altezza del luogo calcolata da lui col suo raggio 3271420 tese fu = 408 , 5. Ma calcolandola colla mia

formola, e supponendo, come dianzi, $\frac{m}{n} = \frac{1}{14}$ avremo

$$\frac{m\phi}{n} = 3' 35'' , 71; \phi + \frac{m\phi}{n} = 53' 55'' , 71; e \text{ sostituiti}$$

questi valori con quello del raggio del Cassini troveremo $CA = 3271821 , 59$; ed $A'A = 401 , 59$ altez-

za minor della data quasi di 7 tese, o di 1 e quasi per 100.

Per calcolare il valor di $\frac{m}{n}$ abbiamo $CB = 3271420$;
 $CA = 3271828, 5$; e $\phi = 50' 20''$. Da questi dati risulta poi $L \tan. \frac{m\phi}{n} = 7.0749829$; ed $\frac{m\phi}{n} = 4' 5''$.

Sarà dunque $\frac{m}{n} = \frac{4' 5''}{50' 20''} = 0,08112 = \frac{1}{12,32}$.

Questa è una delle due osservazioni delle quali il Lambert si è servito per calcolare il raggio orizzontale; che gli è risultato $= 7,06$; onde segue, esser

$\frac{m}{n} = \frac{1}{14,12}$ in luogo di $\frac{1}{12,32}$. Ma l'esattezza del mio

valore dimostrasi anche in quest'altra maniera. Senza la rifrazione l'angolo di depressione, che chiamerò x sarebbe espresso dalla formola $A'A = \frac{r \tan^2. x}{2}$.

Nel presente caso sarebbe dunque $.408,5 =$

$\frac{3271420 \tan^2. x}{2}$; dalla qual si deduce $L \tan. x = 8$.

1987429 ; ed $x = 54' 19''$. Ora, poichè l'angolo osservato fu $50' 20''$, nella differenza di questi due angoli, cioè in $3' 59''$ avremo l'effetto della rifrazione.

Ciò posto sarà $\frac{m}{n} (50' 20'') = 3' 59''$; ed $\frac{m}{n} = \frac{3' 59''}{50' 20''} =$

$$\frac{239}{3020} = 0,07914 = \frac{1}{12,63} \text{ valore ben poco diverso dal}$$

mio .

Da questi due esempj chiaramente apparisce quanto incerto sia il valore della rifrazione dedotto dalla depressione dell' orizzonte marino. Ma le osservazioni dallo stesso Sig. Cassini fatte a Collion-re lo dimostrano ancor più apertamente. Da un luogo superiore al livello del mare di tese $11 \frac{1}{2}$ egli osservò ai 26 e 28 febbrajo, ed al primo e 13 Marzo la depressione; e la trovò ne' primi due giorni di $8' 50''$; nel terzo di $8' 35''$; e nel quarto di $8' 5''$. Senza la rifrazione per l' altezza di tese $11 \frac{1}{2}$ col raggio osculatore della latitudine 43 la depressione sarebbe stata $= 9' 8''$. Le differenze fra questa e le depressioni osservate furon dunque $18''$; $18''$; $33''$; ed

$1' 3''$; alle quali corrispondon per $\frac{m}{n}$ i valori $0,034$;

$0,034$; $0,064$; $0,13$; ovvero $\frac{1}{29,41}$; $\frac{1}{29,41}$; $\frac{1}{15,63}$;

$\frac{1}{7,69}$.

Queste variazioni tanto grandi nelle rifrazioni dell' aria marittima, e quelle anche maggiori, che da altri furon posteriormente osservate rendon troppo incerti i risultati del calcolo delle altezze fondate sulla depressione dell' orizzonte apparente del mare, cosa incomoda per verità; poichè quel calcolo sarebbe più semplice e spedito d' ogni altro.

ARTICOLO VI

Delle livellazioni comuni.

65. Ho detto al principio di questa sezione, che alcuni Fisici confermano le lor regole delle livellazioni barometriche mostrandone i risultati conformi a quelli delle livellazioni comuni. Or dunque aggiungerò alcune avvertenze necessarie per l'esattezza anche di queste. Sia A (fig. V) il luogo, in cui è posto l'occhio dell'osservatore; Ae un arco del cerchio osculatore del punto A , ossia il suo orizzonte vero; AE la tangente dello stesso punto, ossia il suo orizzonte apparente. Sia m un punto della superficie terrestre, di cui cercasi la distanza md dall'orizzonte vero; md' la lunghezza dell'asta; alla cui estremità è posto il segnale, che per l'innalzamento della rifrazione si vede nel punto D della tangente. Si chiamino al solito r il raggio del cir-

colo osculatore di A ; ω l'angolo al centro ACD ; $\frac{m\omega}{n}$

l'angolo di rifrazione $DA d'$; ed esprima l la lunghezza dell'asta md' . Ciò premesso egli è chiaro, che la distanza md dall'orizzonte vero sarà $= md' - dd' = l - dd'$. Ma dd' è $= dD - Dd''$; e $dD = r(\sec. \omega - 1)$. Avrem dunque $md = l - r \sec. (\omega - 1) + Dd'$. E similmente se per un altro punto m' sarà l'angolo al centro ω' la lunghezza dell'asta l' , e l'angolo di rifra-

zione $\frac{m'\omega'}{n}$ sarà la distanza $m'd$ dall'orizzonte vero =

$l' - r (\sec. \omega' - 1) + D d'$. Ognun vede quindi, che la differenza di questi due valori dà la differenza di livello dei punti m ed m' . Restan però da determinarsi i valori di $D d'$ corrispondenti agli angoli di rifrazione $\frac{m \omega}{n}, \frac{m \omega'}{n}$; il che può farsi nella seguente maniera.

Si osservi, che l'angolo $A D d'$ è $= 90^\circ - \omega$;
 $D A d' = \frac{m \omega}{n}$; onde sarà $A d' D = 90^\circ + \omega - \frac{m \omega}{n} =$
 $90^\circ + (\frac{n - m}{n}) \omega$. Avvertasi in oltre, che $A D$ è $=$
 $r \tan. \omega$. Il valore di $D d'$ sarà dunque dato dalla seguente analogia

sen. $A d' D : \text{sen. } D A d' = A D : D d'$; ovvero

$$\cos. (\frac{n - m}{n}) \omega : \text{sen. } \frac{m \omega}{n} = r \tan. \omega : D d'.$$

Sia per esempio la distanza $A m = 250$ tese; alla qual sarà eguale anche l'arco $A d$; e suppongasi il raggio $r = 3267000$ tese. In questo caso sarà $\omega =$

$15'', 78$; e quindi, supponendo col Lambert $\frac{m}{n} = \frac{1}{14}$,

avremo $\frac{m \omega}{n} = 1'', 127$; $(\frac{n - m}{n}) \omega = 14'', 65$; e $D d' =$

$\frac{\text{sen. } 1'', 127 (3267000 \tan. 15'', 78)}{\cos. 14'', 65}$. Fatto coi logaritmi

il calcolo di questa frazione si trova $L D d' = 7.1214833$; e $D d' = 0,0013223$ tese corrispondenti a linee $1,1428992$.

Se i punti m, m' son posti ad eguali distanze dall'occhio dell'osservatore, la differenza de' lor livelli è data immediatamente dalla differenza delle altezze dei segnali veduti nella tangente; poichè allora, sendo le quantità e della curvatura e della rifrazione uguali dall'una e dall'altra parte, tutte si distruggono nel prender la differenza de' livelli apparenti. Ottimo consiglio è dunque quello di livellare, per quanto è possibile, a distanze uguali, come ben sovente può farsi nelle vaste pianure.

Da non curarsi pur sono, perchè quasi insensibili, gli effetti della curvatura e della rifrazione allorchè le distanze non passano 120 tese. A 250 l'effetto della curvatura per la latitudine 45° è di linee $8,49$. In questo caso da una piccola rifrazione, come di $\frac{1}{16}$ dell'angolo al centro, nascerebbe un alzamento del segnale di lin. $1,06$; e da una grande, come di $\frac{1}{15}$ dello stess' angolo di lin. $1,69$. Io non livellerei a distanze maggiori e perchè in queste è difficile di ben concertare le altezze del segnale e perchè la menoma deviazione della visuale dalla tangente produce nell'altezza del segnale qualche frazion di pollice di differenza. L'inclinazione di 2 soli secondi ben difficile ad osservarsi anche ne' migliori strumenti produce nell'altezza del segnale una differenza di pollici $0,20944$ alla distanza di 300 tese, e di pol. $0,27926$ a quella di 400. Or queste lievi differenze accumulate in una lunga livellazione potrebbero nell'ultimo ri-

sultato introdurre alcuni pollici di errore, quantità per sè piccola, ma che, potendo, si debbe evitare.

Alla distanza di 120 te. l'effetto della curvatura, come ho detto, è quasi insensibile. Inperciocchè nella latitudine 45° l'arco di 120 te. è di $7''$, 58; e l'intercetta fra la tangente ed il circolo osculatore di lin. 1, 94. Nei terreni inclinati all'orizzonte di gradi $2^\circ 52'$ l'alzamento del terreno è d'un ventesimo della lunghezza. Or se in una pendenza siffatta si avesse a livellare un'altezza di 500 te.; e se, per abbreviare l'opera diminuendo il numero delle stazioni, si adoperasse un'asta assai lunga, di 6 tese per esempio, le distanze sarebbero venti volte maggiori, cioè di 120 te. Ad ogni stazione avrebbesi dunque per la curvatura della parte inferiore lin. 1, 94; la qual però dovrebbe diminuirsi alcun poco; perchè l'altezza del livello ad un di presso di 4 piedi fa, che il terreno, su cui posa, è superiore non di 6 tese, ma di $5\frac{1}{3}$ al punto inferiore della stazione; e riduce la distanza a tese $106\frac{2}{3}$; cui corrisponde un effetto della curvatura di lin. 1, 54. Il sèttimo di questo, cioè 0, 22 è, secondo il Lambert, l'effetto della rifrazione; e per conseguente il punto inferiore della stazione è in quest'ipotesi distante dall'orizzonte vero di tese 6 — lin. 1, 32. Per la parte superiore della stazione la lunghezza dell'asta sarebbe zero; l'effetto della curvatura lin. 0, 024, quel della rifrazione 0, 003, e la distanza del punto superiore dall'orizzonte vero tese 0 — lin. 0, 021. Dall'altezza di 6 tese converrebbe dunque sottrarre in ogni stazione lin. 1, 299; o più semplicemente 1, 3. Si avverta che per livellare 500 te. d'altez-

za a 6 per ogni stazione sen richiedono 83; e si conchiuda, che la somma di tutti gli effetti di curvatura e rifrazione sarà $83 \text{ (lin. 1, 3) = lin. 107, 9 = pol. 8, lin. 11.}$

Nelle montagne la pendenza del terreno suol essere almen doppia della precedente; il che rende più corte le stazioni; e diminuisce per conseguenza gli effetti di curvatura e rifrazione, che in quelle livellazioni posson quasi sempre negligerarsi.

SULL' APPARECCHIO LATERALE

*Con nuove modificazioni degli Strumenti descritti nella
precedente Memoria inserita nella prima parte
di questo tomo.*

D I G I U S E P P E A T T I

presentata il dì 15 di febbrajo 1810.

L'esperienza sovrana maestra d'ogni arte siccome conduce agli utili ritrovamenti, così le tante volte ne discopre i difetti di quelli che da prima ci parvero giovevolissimi, e che poscia a replicate prove non ressero, o almeno lasciarono desiderio di ulteriore raffinamento. Ciò veggiamo accadere tutto giorno in quelle scienze, che non si fermano nell'astratta speculazione, ma discendono ai bisogni ed agli usi della Pratica. Fra queste la Chirurgia operativa più spesso forse e meglio d'ogni altra Arte ci fa sentire la necessità dell'esperienza degli utili ritrovati riformatrice. Poichè non avvi operazione chirurgica nel processo della quale non si faccia sovente qualche innovazione talvolta ispirata dalla particolarità delle circostanze, talora mossa da fondata ragione, talora anche da una capricciosa curiosità. E questi cambiamenti, quantunque non sempre giovino all'o-

perazione a cui furono diretti, giovano però sempre ai progressi dell'Arte; la quale ponendo in obbligo le innovazioni sfortunate ed irragionevoli, e quelle raccogliendo che dall'esperienza e dal tempo ottennero favorevole suffragio, va tutto giorno accrescendo il tesoro de' suoi strumenti, e conciliando a' suoi metodi semplicità e sicurezza. Fu a questo intendimento che altra volta io esposi i cambiamenti che m'occorsero di fare sul processo operativo della Litotomia, o piuttosto sulla forma e figura degl'istrumenti, che credetti più opportuni al compimento dell'operazione, sembrandomi aver dimostrato che al semplice metodo che io seguiva nella pratica della Litotomia, erasi congiunta colla nuova figura degli strumenti la massima sicurezza. Per essi in fatti evitavansi i più pericolosi scogli dell'operazione, quand'erasi assicurata la strada al coltello in modo, che nè deviar potesse dalla scanalatura del sciringone, nè passar oltre l'estremità di questo, per cui nessun pericolo ci fosse nella direzione, e nell'estensione del taglio. Benchè però per il punto interessantissimo della sicurezza contento dovessi essere delle modificazioni degli strumenti immaginate, eseguite, sperimentate, non potea tuttavia chiamarmi soddisfatto sul riguardo della semplicità del processo operativo. Nel primo metodo un sol coltello puntuto e tagliente d'ambi i lati serviva e all'incisione degl'integumenti, ed al consecutivo taglio dell'uretra, e della vescica; ma dopo le modificazioni non potendo il coltello con estremità bottonata e triangolare servire al taglio degl'integumenti, ed alla prima incisione dell'uretra, era costretto preva-

larmi d' altro strumento per effettuare questi primi tagli, che preceder debbono l' uso del litotomo bottonato. Dalla necessità di cambiare il coltello non è difficile ravvisare l'imbarazzo in cui può trovarsi l'operatore allorchè coll' ultimo incontrar deve l' apertura dell' uretra, che sulla scanalatura del sciringone fu formata dal primo. Quindi deve soffrire la semplicità dell' operazione, quale riesce tanto più facile e semplice, quanto minore è il numero degli strumenti, e quanto meno divisa, meno imbarazzata e più sollecita si è l' azione dell' operatore. Alle quali cose riflettendo io attentamente feci costruire un nuovo coltello, il quale a differenza di quest' ultimo non ha già l' estremità bottonata nè acuta come il primo, ma ottusa e tagliente, che serve a dividere gl' integumenti e l' uretra onde scoprire la scanalatura del sciringone; ha poscia un bottone che ne abbraccia il principio del dorso, il quale coll' alzare il coltello si fa entrare sulla parte più larga della scanalatura del sciringone (luogo appunto che corrisponde al taglio già fatto dell' uretra) di modo che con due semplici movimenti dello stesso strumento, che seguansi l' un l' altro senza interruzione, il taglio può compiersi in pochi secondi con tutta sicurezza. Immaginata tale modificazione, fu mia cura che lo strumento fosse eseguito colla massima esattezza; e nelle ultime operazioni di pietra per le quali ne volli far prova, fu così sicuro e sollecito il taglio, che nulla ora mi resta a desiderare per lo scopo ch' io m' era prefisso della semplicità, e sicurezza. Così io non dubito che la Litotomia, la quale fu per sì lungo tempo considerata

fra le operazioni chirurgiche la più difficile ed azzardosa, tale che per essa mettevasi a prova l'abilità d'un operatore, non dubito, dissi, che ove singolari combinazioni non ne rendano complicata l'esecuzione divenuta per se così semplice, e così facile, non possa da qualunque allievo con coraggio intraprendersi. Non è perciò che alcuna volta appunto per strane ed inaspettate combinazioni non debbasi mettere a profitto quanto suggerisce l'ingegno, e con pronti ed appropriati ripieghi far fronte agli ostacoli, che alla comune maniera d'operare s'oppongono. Allora si è che costretti a deviare dal retto cammino ci è forza di scegliere nuove strade, e d'immaginare nuovi mezzi per condurre a buon termine la proposta operazione. Tali difficili e critiche circostanze ho io pure incontrate più volte, e mi sono trovato costretto sul momento a chiamar in soccorso compensi affatto nuovi per l'arte, volendo superare quelle difficoltà, che alla comune maniera di operare si opponevano. Una fra le altre parmi possa meritare qualche considerazione, come quella che più delle altre m' impegnò a mettere tutto lo studio e la diligenza per riuscirci; e che fino al presente ha costretto gli operatori ad abbandonare in simil caso l'Apparecchio laterale come assolutamente ineseguibile.

Ad ognuno è noto che serve di scorta al taglio nella litotomia un sciringone scanalato, e che quando questo per qualche organico restringimento dell'uretra non possa per essa introdursi in vescica, manca all'operatore sicura scorta per il taglio; e quindi non può egli azzardarlo senza incontrare gravissimi peri-

coli. In tale circostanza appigliavansi gli operatori all'alto apparecchio, vedendo chiusa ogni altra strada all'estrazione della pietra. Per due volte mi è accaduto di non poter penetrare col sciringone in vescica, ed essere obbligato ad immaginare altro compenso.

In un Soggetto molto avanzato in età, e pronto ad assoggettarsi all'operazione della pietra perchè afflitto da lungo tempo da atrocissimi ed intollerabili dolori, mi riesci impossibile l'introduzione del sciringone malgrado i tentativi ripetuti più volte per sortire nell'intento. Indeciso allora a qual partito appigliarmi onde liberare quest'infelice, non seppi determinarmi sull'esempio d'altri operatori all'alto apparecchio, temendone ragionevolmente le pericolose conseguenze sì riguardo all'inoltrata età del soggetto, come ancora per la difficoltà e fors'anche l'impossibilità d'eseguirlo; ma fermo egli nella risoluzione di volere l'operazione a costo d'incontrare la morte, preferibile certamente a vita sì tormentosa, la di lui fermezza e coraggio mi animò e decise a tentare qualunque mezzo per sortirne l'effetto coll'apparecchio laterale, ad onta mi fosse tolto d'introdurre il sciringone in vescica. Costruir feci un sciringone meno curvo dell'ordinario, ed aperto nell'estremità della sua scanalatura; pensai d'introdurlo e portarlo nell'uretra fino al punto in cui fosse trattenuto dall'ostacolo, il quale il più delle volte s'incontra nella parte membranosa dell'uretra vicino al collo della vescica. Su questa scanalatura prominente e sensibile al perineo, io ideava di fare un'incisione dell'ure-

tra, che la mettesse a scoperto per introdurvi una sottilissima sciringhetta. Con essa scorrendo sulla scanalatura fino all'ostacolo, io m'avvisava che non sarebbe stato difficile il superarlo, ed entrare in vescica. Era pronta una sonda scanalata parimente aperta nel suo estremo, e che perfettamente combaciava col dorso della sciringhetta di modo che questa avria servito di scorta alla sonda per essere introdotta in vescica. Ritirando allora la sciringa, e portando la sonda in alto contro l'angolo del pube colla scanalatura in basso, e rivolta obliquamente verso il lato sinistro, su d'essa io poteva strisciare il litotomo, e fare il taglio laterale nel modo stesso che l'avrei eseguito dietro la scanalatura del sciringone. Che se riguardo alla obbliquità del taglio si fosse desiderata una sicurezza maggiore, si avrebbe potuto introdurre in vescica lungo la sonda scanalata il conduttore di Pouteau armato del suo moderatore a livello, che serve di norma al Chirurgo per la necessaria obbliquità del taglio, e lo assicura dalle pericolose conseguenze d'un taglio o perpendicolare, o orizzontale. Tale fu l'apparecchio ch'io credetti di disporre traendone l'idea dal metodo il quale ho dovuto seguire più volte nel trattamento di quelle fistole al perineo, che chiudevano affatto la strada per penetrare in vescica. Prima però d'accingermi ad operazione sì complicata e difficoltosa, tentar volli di nuovo nel giorno fissato per la medesima l'introduzione del sciringone, per risparmiar, se pur era possibile, la lunga e dolorosa manovra di questo nuovo processo operativo. Il tentativo fu favorevole mentre senza grandi sforzi balzò

il sciringone in vescica; mi trovai in istato di operare nel modo ordinario, e l'operazione riuscimmi per l'esecuzione e per l'esito felicissima. Quantunque quest'incontro fortunato mi togliesse l'opportunità di mettere a prova questa nuova maniera di operare, che io m'era proposta; ne era però così contento dell'invenzione, e così persuaso del successo, che non dubitando di rimanerne soddisfatto allorchè l'avessi sperimentata, mi proposi di fare fin d'allora il tentativo quando nuova occasione mi si fosse presentata. Essa non tardò guari, e non sono che pochi mesi che ne feci l'azzardoso ma indispensabile tentativo, seguendo presso a poco il processo operativo già descritto. L'operazione ebbe a farsi su di un uomo di fresca età da alcuni anni tormentato da dolorose ritenzioni d'urina. Non sospettando per modo alcuno l'infermo di corpo estraneo esistente in vescica attribuiva il suo incomodo ad organici restringimenti dell'uretra, dei quali egli ben ne conosceva la causa, e ne confermava l'esistenza l'esplorazione colle candelette, e coi cordoni elastici. Ad onta però di una cagione assai sufficiente a spiegare la suddetta ritenzione d'urina furono rilevati dal Chirurgo che ne aveva la cura, alcuni sintomi particolari, i quali lo fecero sospettare che esistesse pietra in vescica. L'assoggettò perciò all'esplorazione, che dovette ripetersi più volte per la difficoltà di superare le angustie del condotto, ma che poscia riuscita mise fuor di dubbio la presenza della pietra. Fummi allora consegnato l'infermo per l'operazione, e tosto prevedi, attesa la difficoltà pel passaggio della sciringa, l'imba-

razzo in cui dovea trovarmi per l'introduzione del sciringone, che riesce sempre più stentata e laboriosa. Si avverò il sospetto, ed un'ora e più che io impiegai in inutili tentativi non bastò a superare gl'intoppi che s'incontravano nell'uretra vicino alla vescica. Conosciuta l'impossibilità di portarci il sciringone c'introdussi una sottilissima sciringa, determinato d'operarlo nel modo sopra descritto. Commisi all'Assistente la sottile sciringa, che fu da lui sostenuta contro il pube dirigendone obbliquamente verso il lato sinistro la convessità. Tagliati gl'integumenti nella comune maniera azzardai il taglio dell'uretra sulla rotonda convessità della sciringa, per cui scoperta una porzione del suo dorso c'insinuai la sonda scanalata, e lungl'essa la portai fino in vescica. Questa, come già ho descritto, servì al compimento del taglio, mentre su d'essa feci scorrere il litotomo bottonato. Colla scorta dell'indice introdussi la tanaglia colla quale rinvenni ed afferrai tosto la pietra. Per sfortuna l'operazione, che per tante combinazioni era stata sì lunga e tormentosa, lo divenne assai più per la rottura della pietra che a pezzi dovette estrarsi tutta. Un travaglio così penoso pareva che dovesse destar nell'infermo sintomi pericolosi, e far temere funeste conseguenze; pure quanto questo giovane provò avversa la fortuna e prima e nel tempo della operazione, altrettanto favorevole l'incontrò dopo la medesima. Nulla turbò la calma, che l'estrazione della pietra gli procurò, e dopo quattordici giorni le urine ripresero il cammino naturale, l'ulcero si restringe, e nel vigesimo quinto era già to-

talmente cicatrizzato. Così ebbi il contento di veder coronato di favorevol successo un nuovo tentativo in circostanza tanto critica e difficoltosa. Se stretto a' principii ed alle regole dell' arte o avessi ricusato d' operare quest' infelice, o l' avessi sottoposto all' alto apparecchio, egli o proverebbe ancora gli effetti di vita così tormentosa, o saria rimasto vittima di un processo operativo così pericoloso, e di malattia così micidiale. I compensi dell' arte non possono stabilirsi per regole; d' uopo è che l' ingegno gli formi sul punto, e gli applichi alle circostanze ed a' particolari bisogni. La pratica chirurgica ha questo di superiore allo studio teorico, che mentre questo dirige i regolari passi dell' operatore, l' altra gl' insegna il cammino, che tener deve quando imperiose circostanze lo deviano dal retto sentiero.

DELLA SIMIGLIANZA MECCANICA

M E M O R I A

D I P A O L O D E L A N G E S

ricevuta il dì 20 di marzo 1810

Se il modello d'una fabbrica, o d'una macchina serve a farne comprendere la struttura senza affaticare la fantasia, in confronto del disegno, presentando esso la materiale configurazione, e la posizione rispettiva delle parti e tutte raccogliendole in complesso sotto l'occhio; egli è altresì vero che il costruirlo osservando puramente l'egualianza degli angoli, e la proporzionalità nelle dimensioni, cioè di simiglianza geometrica col propostosi lavoro in grande, se è in tal guisa sufficiente per le considerazioni da farsi sugli uffizj ed usi della massima parte delle fabbriche appartenenti alle architetture civile e militare, non lo è, come dimostreremo, ne' casi in cui dal modello vogliano dedursi risultati proporzionali, riguardo a resistenze ed a equilibrij, a quelli della macchina che raffigura. Quindi è d'uopo conoscere un'altra sorta di simiglianza, ch'io denomino *Simiglianza meccanica*, e su cui intendo ora di ragionare.

§ I

Che la simiglianza geometrica non sia valevole ad assicurarci degli effetti d'una macchina e della sua riuscita all'intento divisato, da quelli del suo modello, ciò è comunemente noto a grado tale, che non di rado la scienza meccanica va soggetta alla derisione del volgo, come se dubbj ed incerti ne fossero i suoi principj: anzi che sapendosi per esperienza che ove si tratti di equilibrio, la potenza nel modello costruito semplicemente di simiglianza geometrica, è sensibilmente minore di quella che occorre in fatto nella macchina che rappresenta, venne da' pratici ammesso l'arbitrario canone o regola, che la potenza per l'equilibrio concreto nella stessa debba computarsi una terza parte maggiore di quella che al suo equilibrio matematico competerebbe, facendo cioè astrazione delle naturali resistenze.

§ II

Qualora non abbiasi per oggetto che d'investigare dalla resistenza alla rottura, oppure dalla quantità del carico di cui è capace, vale a dire dalla robustezza del modello quella dell'opera che vuol costruirsi, la sola simiglianza geometrica ci conduce al desiderato fine, e ne troviamo additata la via nella Memoria del celebre L. Eulero., *Regula facilis pro diiudicanda firmitate pontis aliisque corporis similis ex cognita firmitate moduli*, (*Novi Comm. Acad. Scien-*

tiar. Imperialis Petropolitanae. Tom. XX; anno 1775), in cui due sono i problemi che dà su questo particolare. Nel primo determina il peso occorrente che può portare una corda fino al punto di spezzarsi, dall'essere per esperienza cognito quello che può portare una cordicella similmente piegata. Nel secondo poscia, supponendo che la robustezza d'un ponte dipender debba dalla resistenza alla rottura di travi uguali di cui fosse architettato, e dato per esperienza il peso, computato il proprio, che può portare un travicello di simili dimensioni, cioè la sua resistenza rispettiva, determina quella del proposto ponte, ossia il peso che potrebbe sostenere prima di rompersi; e quindi con uno de' soliti artifizj usati da sì sommo algebrista trova la grossezza di cui dovrebbero essere dotate le travi per renderlo atto ad una prescritta forza premente.

§ III

Ma parlando de' modelli di macchine immaginate a vantaggio delle arti e dell'agricoltura, nelle quali debbonsi valutare, e non reputarle di un'entità trascurabile, le resistenze degli attriti, per non rimanere delusi nel conseguire la bramata riuscita; è manifesto, che supposto eseguito il modello con simiglianza geometrica, stando i pesi de' solidi simili, e di eguale gravità specifica, in triplicata ragione de' lati omologhi, le pressioni dipendenti dal peso de' membri nel modello saranno proporzionalmente di gran lunga minori di quelle che si eserciteranno da' simili membri nella macchina, e che per-

ciò dovendosi vincere anche le resistenze di attrito causate da tali pressioni, la proporzione che per l'equilibrio concreto si sperimenterà nel modello tra la potenza e la resistenza, non sarà giammai quella che alla macchina converrà: imperocchè ponendo che le dimensioni del modello a quelle della macchina abbiano la ragione di 1 a 12, e sia pure 1 a 12 la ragione de' pesi che denotano la potenza e la resistenza; mentre per la simiglianza geometrica si otterrebbero dal modello risultati proporzionali, computata anche la resistenza degli attriti dovuta alla pressione che nello stato di equilibrio matematico esercitano la potenza e la resistenza insieme, a quelli della macchina, non riescono però tali in virtù dell'attrito dipendente dalla pressione del peso de' membri che debbono disporsi in istato di equilibrio, seguendo il peso loro non la ragione semplice, ma la ragione triplicata delle omologhe dimensioni, cioè nell'esempio assunto, la ragione di 1^3 a 12^3 , cioè di 1 a 1728.

§ IV

L'esposta considerazione ci fa rilevare, che per costituire un modello sì che corrisponda e possa accertare degli effetti e dell'efficacia della macchina in grande, convicne, costruito che sia con simiglianza geometrica, rettificarlo in maniera che acquisti quella simiglianza, ch'io chiamo, come dissi, *simiglianza meccanica*. Per giugnere a ciò, rappresentate la potenza e la resistenza d'una macchina da pesi ad esse equivalenti, come suol ordinariamente accostumar-

si, di due moduli dovrà farsi uso per la fabbrica del suo modello, il primo de' quali sarà lineare, e si adoprerà per determinare le dimensioni de' membri; e l'altro sarà di peso per proporzionare in esso que' pesi che devono agire relativamente a quelli della macchina. Prevenendo che una delle principali avvertenze nell'architettare il modello, si è quella, che i membri, che devono scambievolmente strofinarsi sieno rispettivamente della stessa materia e con superficie egualmente preparate a quelli della macchina, darò qui un' applicazione dell' enunciata regola, onde ne comparisca il grado di sua utilità praticamente.

§ V

Preso per modulo delle dimensioni, il pollice per un piede, e per quello de' pesi, l'oncia per una libbra; un picciol legno lungo pollici 12 di figura parallelepipedica, di cui l'altezza e larghezza è un pollice, sia il modello di una trave di dimensioni conformi al modulo indicato, che dee sostenersi in equilibrio intorno ad un perno immobile, che l'attraversa in direzione perpendicolare alla sua lunghezza in guisa che il di lui asse giace nella sua base, da una potenza che agir deve ad una sua estremità, essendo attaccato all'altra il peso di libbre 12. Stante il modulo prescelto per le dimensioni siano nel nostro modello rispettivamente a quelle determinate per la macchina, la lunghezza del braccio dalla parte del peso da attaccarsi, che sarà riguardo al predetto modulo de' pesi di once 12, pollici 3, e quella del braccio dalla

parte della potenza pollici 9, il raggio del perno $\frac{1}{4}$ di pollice; e per esperienza sia noto essere once 6 il peso del travicello. E' chiaro che per l'equilibrio matematico, prescindendo cioè della resistenza di attrito, dovrebbe essere la potenza once 4; ma per ottenere l'equilibrio concreto occorra ad essa l'aumento di $\frac{11}{90}$ d'oncia, da cui si ricaverà che $\frac{44}{15}$ d'oncia, quarto proporzionale al raggio del perno, al braccio della potenza, ed all'aumento predetto, è la resistenza di attrito sul perno; e che in conseguenza per essere once 22, che sono la somma della potenza per l'equilibrio astratto e del peso da sostenersi con quello del travicello insieme, la pressione sullo stesso perno; sarà la ragione della pressione all'attrito quella di 5 ad 1.

§ VI

Ora essendo nota siffatta proporzione, agevolmente si scopre, che dell'aumento suddetto $\frac{11}{90}$ di oncia, $\frac{8}{90}$ appartengono all'attrito relativo alla pressione sul perno della somma del peso da sostenersi, con quello che rappresenta la potenza; e che $\frac{3}{90}$ è la parte di aumento nella potenza rispetto all'attrito prodotto sul perno stesso dal peso di once 6 del travicello. Siccome poscia il peso del travicello a quello del trave ha la ragione triplicata delle omologhe dimensioni, cioè quella di 1^2 a 12^3 , ovvero di 1 a 1728; così scorgesi in fatto, come s'è detto superiormente, che l'attrito sul perno per conto del travicello nel modello risulta assai minore rispettivamente all'asse-

gnato modulo de' pesi, di quello che reca il peso del trave nel suo; poichè essendo il peso del trave libbre 864, dovrebbe essere quello del travicello once 864 compreso il proprio di once 6: si dovrà dunque caricare questo di once 858, cioè di libbre $71 \frac{1}{2}$ perchè risulti il modello di simiglianza meccanica verso la macchina che rappresenta, e quindi nella sopracennata ragione della pressione all'attrito, si troverà che la potenza nel modello verrà aumentata, oltre agli $\frac{8}{90}$ di oncia, di once $4 \frac{72}{95}$; sicchè la proporzione per l'equilibrio concreto in esso tra il peso da sostenersi e la potenza, sarà di 12 a $8 \frac{2}{3}$; e tale appunto sarà la proporzione che si sperimenterà nella macchina medesima.

§ VII

Dal riferito esempio sulla macchina fra le più semplici che possano idearsi si raccoglie, che mentre la potenza matematica nel costruito modello con simiglianza geometrica è once 4, diventa once $4 \frac{8}{90}$ computando l'attrito sul perno dovuto alla pressione di detta potenza e del peso o resistenza con cui dee equilibrarsi, e che diventa, supposto conformato il modello in simiglianza meccanica, di once $8 \frac{2}{3}$, cioè più che doppia della potenza matematica; dal che apparisce di quanta importanza sia la correzione, che dee farsi nel calcolo de' modelli riguardo al peso de' membri che concorrono ad aumentare gli attriti, vale a dire di costituirgli in simiglianza meccanica colle macchine che rassomigliano. E poichè nel nostro esem-

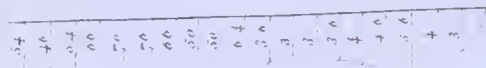
pio l' oncia nel modello indica la libbra nella macchina, ne segue che la potenza pel suo equilibrio meccanico dovrà essere di libbre $8 \frac{2}{3}$, come esattamente dà il calcolo diretto sulla stessa, usando della ragione tra la pressione e l' attrito, che si ottenne dal modello, e valutando il peso della trave dedotto come s' è fatto.

§ VIII

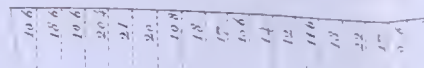
Trattandosi d' una macchinazione per far ascendere o discendere un corpo lungo un piano inclinato, come abbisogna, a cagion d' esempio per far discendere in acqua o tirare a terra i navigli, il modello di simiglianza geometrica è bastante a dimostrare ciò che succeder deve nella macchina in grande, avvegnachè la ragione per l' equilibrio tra la potenza e la resistenza sarà la stessa sì nell' uuo che nell' altra, sempre che sia osservata l' eguaglianza negli angoli d' inclinazione, e le superficie che devono strofinarsi sieno egualmente condizionate. Sono però oggidì talmente conosciute le leggi delle resistenze d' ogni genere, e singolarmente quelle degli attriti, e reso sì comune il calcolo di esse, che non v' ha d' uopo rintracciare dal modello la capacità o l' efficacia della macchina per il fine a cui si vuole applicare, purchè non si trascurino soprattutto i pesi de' membri che deggiono porsi in movimento, come s' è dimostrato essere necessario nel definire la simiglianza meccanica. Sarà non perciò il modello geometrico utile, sì per comprendere in alcuni casi con facilità

la struttura della macchina ideata, che per iscoprire in altri i canoni o le proporzioni tra le pressioni e gli attriti pel calcolo di essa.

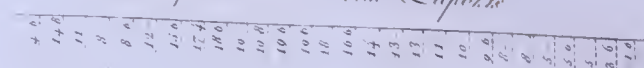
I. In direzione del Molo delle Asine



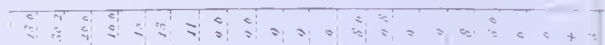
II. Rimpetto alla chianca abbandonata di Verosini



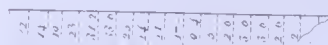
III. Rimpetto all'Ortoia delle Pozzole



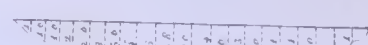
IV. Secondante il Molo delle Pozzole



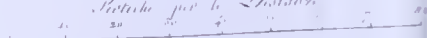
V. Alla vecchia Chiavica della Pilata



VI. Del Po delle Fornaci a S. Maria di Corbela

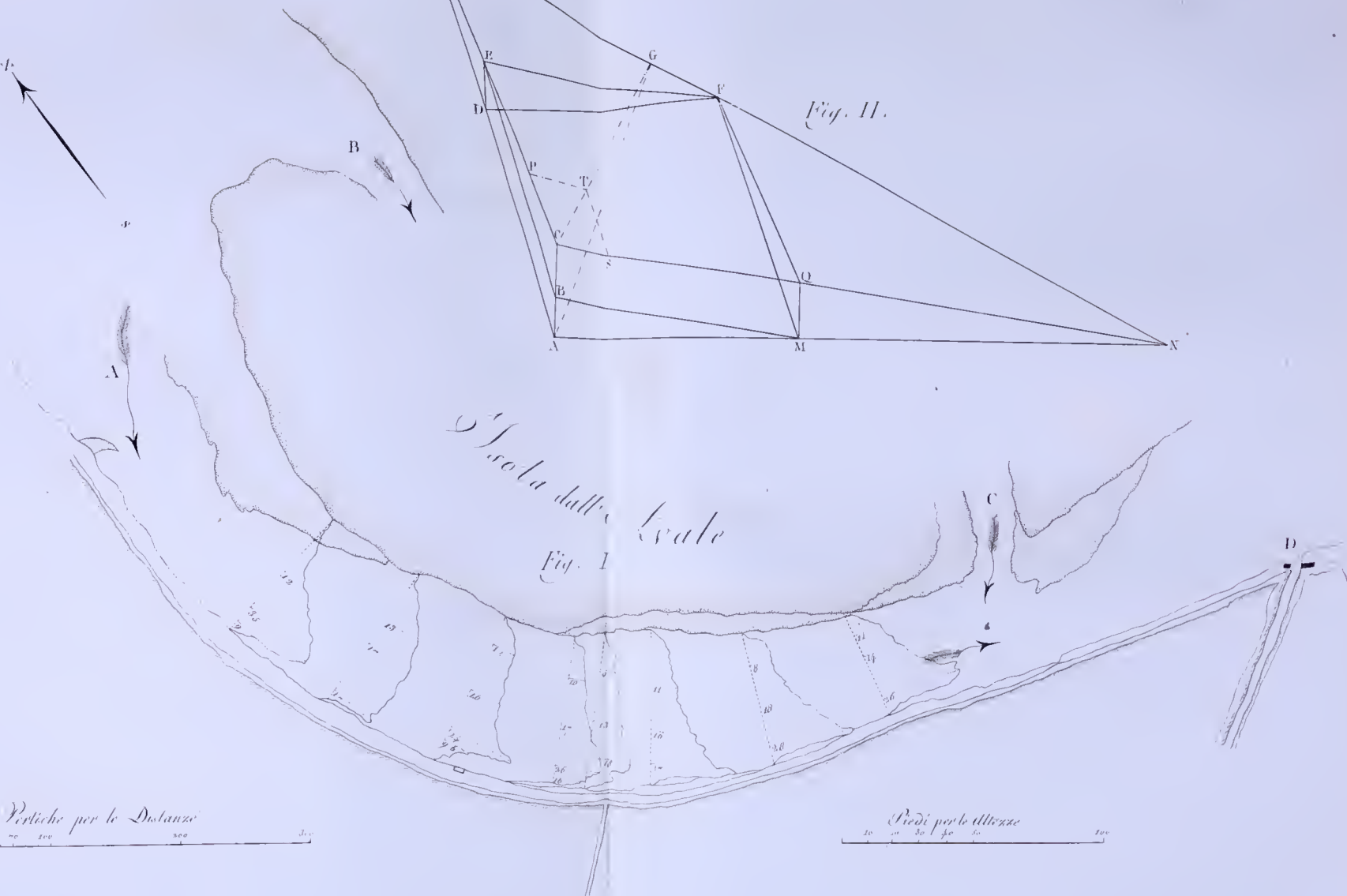


Partito per le Distanze



Partito per le Altezze





Isola dalle Isale
Fig. I.

Fig. II.

Vertiche per le Distanze

Piedi per le Altezze

DELLA INCLINAZIONE DELLE SPONDE

negli alvei de' fiumi

DI SIMONE STRATICO

ricevuta il dì 1 di maggio 1810.

1. **G**li alvei de' fiumi, dove questi scorrono sopra un suolo composto di parti facilmente amovibili, come di terra o di sabbia, hanno il fondo inclinato verso la loro foce, e le sponde inclinate dalle ripe verso il mezzo della larghezza dell'alveo, o similmente, ciocchè è più raro, o disugualmente, ciocchè è più frequente; oppure rimane tra le sponde uno spazio, che si può riguardare come orizzontale nel verso della larghezza dello stesso alveo. Le sponde e il fondo formano la sezione del fiume.

2. Nell' inclinazione del fiume pel verso della lunghezza, si distingue quella del fondo, e quella della superficie dell'acqua corrente. La prima è costante in ogni stato del fiume, e può variare in corso di tempo, per l'introduzione di nuove acque, o per distrazione di quelle che gli erano proprie. La secon-

T. II. P. II.

33

da è diversa negli stati di magra e di piena. Così mentre l'acqua de' fiumi in piena s'inalza a molti piedi in punti lontani dalla foce in mare, vicino alla stessa s'inalza assai meno.

3. La cadente de' fiumi, cioè l'inclinazione all'orizzonte della linea del loro fondo, dipende dall'inclinazione, e dall'indole del suolo che attraversano, e dalla mole e altezza delle loro acque in istato ordinario. L'inclinazione del suolo è varia e non in una sola direzione, e l'indole del suolo, presentando resistenze dissimili, fa sì che la linea del corso d'acqua acquisti varie tortuosità, per le quali la cadente si fa minore. Non si può generalmente asserire che le pianure attraversate dal corso de' fiumi, siano prodotte dalla espansione delle loro acque, e dalle materie che vi hanno deposte. Le ghiaie che trovansi a certe profondità in alcune pianure, ancorchè simili a quelle che si osservano in qualche non lontano fiume, lasciano in dubbio, se il fiume ve le abbia in altro tempo portate, o se abbia soltanto scoperte quelle che veggonsi nell'alveo snudandole dalla terra sotto la quale giacevano: ed è almeno incerto, se la produzione delle ghiaie si debba ai fiumi, al mare, o ad altra origine. Tuttavolta gli strati di antiche valli, e di aggallati, che trovansi a diverse profondità, coperti di creta, di sabbia, di terra, e gli strati di corpi marini in situazioni ben lontane dal mare, non lasciano dubitare, che que' piani, dove s'incontrano tali sostanze, non siano stati colmati e formati dalla espansione de' fiumi: lochè si conferma ancora dal prolungamento in mare degli alvei di molti fiumi,

per cui evidentemente si è aggiunto terreno alle antiche spiagge.

4. Convien però distinguere gli alvei di natura da quelli d' arte, e stabiliti dall' industria degli uomini. Alvei di natura possono dirsi quelli che sono incassati nel suolo, e non giungono colle loro piene a superare i terreni aggiacenti, o almeno li superano per poco: alvei d' arte sono manifestamente quelli che hanno una parte della profondità loro incassata nel suolo, e un' altra parte superiore contenuta da argini, e quelli ancora che sono pensili, avendo il loro fondo elevato sopra il piano de' terreni aggiacenti. Acquistano gli uomini con questo mezzo delle ampie estensioni di terreni fruttiferi, comechè ciò non sia senza il pericolo di perdere talvolta tutto il frutto della loro industria, nè senza la necessità e dispendio di molta custodia.

5. La mole e l' altezza dell' acqua negli alvei essendo una cagione della velocità del suo corso, fa sì che l' inclinazione del fondo sia maggiore o minore, e corrisponda a qualche funzione della ragione inversa dell' altezza. I fiumi grandi, i quali raccolgono le acque di molti influenti, hanno una pendenza minore di quella degl' influenti. Intendo de' fiumi che scorrono nel piano e sopra un suolo di parti amovibili. A ciò si riferisce la massima per se verissima, che fiume non interrisce fiume; perchè l' influente portando materie simili a quelle che porta il recipiente, vi porta insieme la mole d' acqua necessaria a produrre la velocità, che si richiede per mantenere sospesa la materia delle torbide, sicchè non si depon-

ga sul fondo, e non lo interrisca. I torrenti poi, o fiumi temporanei hanno la pendenza del loro fondo, proporzionata bensì inversamente ad una funzione dell'altezza delle loro acque nel breve tempo delle loro piene, e se confluiscono nello stesso alveo contemporaneamente, determinano la pendenza di questo come i fiumi, ma non così se non sono contemporanei; e quindi può succedere l'interramento e alzamento di fondo dell'alveo comune. Perciocchè se la mole d'acqua contemporanea è minore, è conseguente che la materia della torbida non possa restare sospesa, e si deponga sul fondo, e ciò sino a tanto che venga a formarsi con le posature un'inclinazione di letto, atta ad impedire con la velocità del corso ogni ulteriore interramento.

6. Per ispiegare come l'alveo di un fiume, il quale porti della torbida, e sia scavato in un suolo composto di parti facilmente amovibili, la cui sezione fosse in origine rettangolare, e proporzionata al volume delle sue acque, e alla sua pendenza di fondo, si conformi dopo qualche tempo con le sponde inclinate e convergenti verso un qualche punto della sua larghezza, si adduce che l'acqua la quale scorre lungo le sponde e le ripe si ritarda per il soffregamento con esse, e per la sua velocità con ciò diminuita depone qualche parte della sua torba; che si diminuisce ancora la velocità in qualche distanza dalla ripa, ma in grado progressivamente minore da questa verso il mezzo della larghezza; quindi che la posatura della torba è minore verso il mezzo, e vi si mantiene maggior fondo, e il maggior corso, che

si chiama il filone, o spirito del fiume. Che per queste posature laterali la sezione si diminuisce, e che l'acqua dovendo progredire per una sezione minore di quella che le compete, o s'inalza e si espande nel piano aggiacente, o se è contenuta da argini dirupa, e fa smottare le ripe, le quali formate di terra, o sabbia, non possono sostenersi verticali, ma si dispongono a certa inclinazione. Quindi la sezione si fa più capace, più larga in alto, più stretta abbasso: oppure insieme l'alveo si profonda, e si scava nella linea del maggior fondo, e progressivamente meno da questo verso le ripe. Tutto questo avviene sino a tanto che si pareggi l'azione dell'acqua con la resistenza e tenacità della materia del suolo. Dove poi il fiume porta delle torbide, e ne portano tutti più o meno, particolarmente nelle piene, se può espandersi ne' terreni aggiacenti, si va egli formando con successivi alzamenti i confini della sua larghezza, e la base degli argini che gli convengono, e che gli uomini poi, dove loro giova, portano a maggiori altezze, a misura che la capacità della sezione si trova minore di quella che compete alla mole dell'acqua, prevenendo così l'opera più lenta della natura. Si osserva generalmente che i terreni vicini alla linea de' fiumi sono più alti di quelli che trovansi a qualche distanza dalla stessa linea, sicchè le terre comprese tra due fiumi, i quali progrediscano con direzioni simili verso le loro foci sono avvallate nell'intervallo che li disgiunge. Questa, per così dire, naturale disposizione ne' fiumi di arginarsi da per se lusingò qualcheuno sino a persuadersi, che fosse miglior consi-

glio quello di non costringere il loro corso con argini manufatti, ma di lasciarli espandere liberamente le loro acque, sino a tanto che alzando i vicini terreni s'incassassero nelle stesse loro deposizioni. E' però evidente si rinuncierebbe con ciò al copioso frutto che si ritrae dai terreni difesi coll' arte per mezzo degli argini, in aspettazione dell' opera della natura, tarda al paragone della sollecitudine degli uomini a raccogliarlo. Non pertanto s' imita quest' opera della natura con le colmate o bonificazioni per riempimento, con molta utilità.

7. Che se si supponga libera da torbide e chiara l' acqua corrente in un alveo, quella che scorre vicina alle ripe è ritardata dal soffregamento, non è atta a corrodere il fondo; bensì quella che scorre più distante dalle stesse e più vieina all' asse: perciò l'alveo si conforma con maggiore profondità verso il mezzo della sua larghezza, e le sponde riescono inclinate, e verso lo stesso mezzo convergenti, qualora il terreno sia composto di parti amovibili.

8. Qualunque però sia la cagione per cui la conformazione degli alvei de' fiumi risulta quale in fatto si osserva, si presenta naturalmente la ricerca, se, e come questa modifichi il corso delle loro acque, avendo particolarmente riguardo ai fiumi grandi e di molta larghezza, ne' quali le pendenze delle sponde opposte sono notabilmente disuguali. Ho quindi notato nella Tav. I le larghezze e le inclinazioni delle sponde date dallo scandaglio delle altezze dell' acqua sopra il fondo in varie sezioni del Po nelle situazioni indicate nella stessa Tavola, le quali sono prese alle

segnate distanze tra di loro. Dai numeri degli scandagli rilevansi prossimamente, anche senza il presidio delle figure, gli angoli d'inclinazione, e riscontransi ancora i solchi più profondi disgiunti da rialzi di terra prolungati, che dividono nello stesso alveo un corso d'acqua dall'altro nel fondo. Nella Tavola II sono rappresentate in figura alcune sezioni dello stesso fiume nelle quali si rimarca la proporzione della profondità alla larghezza. Nella Tav. III; Fig. I sono delineate ai loro luoghi le sezioni di un ramo curvilineo di Po, e sono quelle stesse che si rappresentano nella Tavola I con i numeri degli scandagli alla lettera G. Queste tavole rappresentano il fatto fisico del quale si tratta in questa memoria; e dimostrano quanto sia grande la pendenza laterale delle sponde, mentre quella del fondo nel verso della sua lunghezza non arriva ad un piede per miglio ragguagliatamente. L'esempio è preso da un fiume grande, perchè sebbene la stessa legge abbia luogo anche ne' fiumi minori, tuttavia gli effetti non possono essere così cospicui, come lo sono dove l'azione è di grandi masse di fluido e in grandi larghezze. Gli autori della scienza delle acque correnti non hanno trascurato questa ricerca, ma mi è sembrato che vi sia luogo ad ulteriori considerazioni.

9. Per figura d'un alveo intendo quella che risulta dalle sue sezioni, ed è compresa tra le due opposte ripe, o quali le dà il terreno in cui l'acqua resta sempre incassata, o quali risultano dalle arginature che s'inalzano sopra le stesse ripe, dove l'altezza delle piene supera l'altezza delle terre aggia-

centi. Dove poi gli argini sono posti a qualche distanza dalle ripe, e rimane tra queste e il piede delle arginature una larghezza di golene, oppure dove trovansi negli alvei isole, gretti, renaj alternamente scoperti, e coperti dall'acqua per le vicende delle piene e delle magre, ivi il fiume si dee riguardare come corrente in due o più alvei di figura e proprietà diverse, atteso che le direzioni del corso trovansi diversamente nello stato di piena, di acqua ordinaria, e di magra. Egli è perciò che conviene e prudentemente si suol fare molto conto delle osservazioni locali, e de' particolari fenomeni che presentano gli stessi fiumi ne' varj punti del loro corso, dipendenti bensì dalle leggi generali del moto delle acque, ma in mille guise variati dalle particolari circostanze, e che non si possono conoscere se non che dal fatto e dall' immediata osservazione.

10. Barattieri uno de' più utili scrittori intorno ai fenomeni, e ripari delle acque correnti, osserva che negli alvei de' fiumi vi sono due pendenze sopra le quali scorrono le acque. Una, dic' egli, è naturale dal principio del movimento loro, sino dove hanno termine in mare: l'altra è accidentale da dove l'alveo è meno profondo sino dove egli è più profondo, cioè dalla spiaggia opposta a quella in cui si fa la corrosione, verso questa stessa. Tale pendenza, soggiunge, si può chiamare accidentale, perchè resta mutabile, secondo che si vanno mutando gli effetti de' fiumi, che si alzano o si abbassano con la superficie de' loro fondi. Questo è per il lodato autore come un principio, al quale egli sempre si riferisce, quan-

do ragiona delle corrosioni de' fiumi maggiori, e particolarmente dell' Adda e del Po, sopra i quali ebbe molte occasioni di meditare e di operare, facendo sempre osservare le direzioni oblique, o diagonali, com'Egli le chiama, cagionate dalla pendenza del fondo da una sponda verso l'opposta, alla quale perciò si avvicina il maggior corso.

11. Michelini considerò con qualche applicazione di studio l'effetto dell'acqua corrente in un alveo, il cui fondo oltre l'essere inclinato all'orizzonte nel verso della sua lunghezza, lo è anche per il verso della larghezza, sicchè la ripa, considerandone l'altezza sua verticale sotto la superficie dell'acqua, sia più elevata da una parte, che dall'opposta del fiume. Premette Egli una proposizione, ed è, che se vi sia un vaso di pareti verticali e col fondo inclinato all'orizzonte da una parete all'opposta che le sia parallela, quella parete che è più alta sopra detto fondo sostiene una pressione dall'acqua contenuta nel vaso, la quale alla totale pressione dell'acqua stessa, ha la ragione del seno dell'angolo d'inclinazione del fondo alla secante dello stesso angolo. Indi applica all'alveo del fiume sopra indicato questa dottrina, e stabilisce che la ripa più alta sopra il fondo sostiene dall'acqua una pressione nella ragione anzidetta, la quale combinata con la velocità del corso parallelo alla sponda viene a produrre un moto obliquo che percuote la ripa e la corrode, lo che non avviene alla sponda opposta, perchè il moto obliquo testè indicato, ha una direzione divergente dalla stessa. Michelini s'ingannò nel valutare la pressione che l'acqua

stagnante esercita nella parete più alta del vaso il cui fondo è inclinato. La misura di questa pressione non ha verun rapporto all'inclinazione del fondo nè all'ampiezza di questo, ma soltanto all'altezza e alla larghezza della parete del vaso che è al contatto dell'acqua. Egli ha introdotto nel suo discorso inutilmente questo elemento fallace, ma non s'ingannò nell'asserire, che la massa d'acqua messa in moto dove ha maggiore altezza dalla parte del maggior fondo acquista una direzione obbliqua, percuote la ripa con maggiore energia, e la corrode o la fa smottare.

12. Guglielmini considera come avvenga che l'alveo di un fiume conformato da principio con le sponde regolarmente convergenti verso il mezzo della larghezza si escavi più da un lato che dall'altro, e in conseguenza il maggior fondo o filone si avvicini più a una ripa, e si allontani dall'altra. Spiega egli questo effetto per la disuguale resistenza del fondo. Perciocchè posta la medesima velocità in tutta la sezione dell'alveo, se avviene che la tenacità del suolo non sia uniforme, si escaverà egli di più dove è meno resistente, e quindi si farà ivi maggiore la velocità; e ciò succedendo in vicinanza ad una delle ripe, la velocità si farà minore vicino alla ripa opposta: conseguentemente sopra il fondo di questa si deporrà della torbida, e s'inalzerà la sua superficie. Così, e per esempio, escavandosi l'alveo a sinistra, si alzerà il fondo alla destra, il filone si accosterà alla sinistra, e vi produrrà una corrosione, o un seno. Ma se il suolo sia di materia uniformemente resisten-

te in tutta la larghezza dell' alveo, se la direzione del suo corso sia rettilinea, nè per intoppi, o inflessioni si muti, l'alveo si conserverà regolare, e le sponde riusciranno egualmente inclinate verso il mezzo della larghezza. Quindi Egli avverte, come per il trasporto del filone, e per il suo avvicinamento ad una delle ripe, mentre dall' altra parte il fondo s' inalta, avviene che nel luogo, dove per questo motivo si fa la corrosione, l'acqua s' inalta, e il filone nelle piene si mantiene più sollevato. E da ciò ricava un precetto, ed è che nella formazione degli argini si abbia riguardo a questa circostanza, e tengansi più alti gli argini nel vertice della corrosione, di quello che sopra, o sotto questo luogo, e facciansi anche più robusti, più larghi, e della migliore costruzione.

13. Zendrini scorrendo delle corrosioni, impugna direttamente la dottrina di Barattieri. Che la spiaggia, dic' Egli, rivolti l' acqua, o tutta, o parte a caricare il filone e la ripa che da questo è posta in corrosione, ancorchè possa verificarsi in qualche caso, non può seguire in riguardo alla natura dell' acqua corrente, ma solamente rispetto ad alcune circostanze, che possono alterare il moto dell' acqua dalla sua origine sino alla fine. Nè tampoco può succedere, secondo le leggi della Statica, avvegnachè mantenendosi di livello la superficie trasversa da ripa a ripa, nè mai l' acqua dalla destra alla sinistra passando, non può realmente asserirsi, che nella medesima sezione camminar possa l' acqua, parte per il suo fine, e parte con direzione verso la ripa opposta; onde la proposizione di Barattieri per questo capo, non si ac-

corda con le leggi del moto delle acque. Soggiunge però, che il sentimento di Barattieri si verifica, se non in tutto, almeno in parte, prendendo la cosa dai suoi principj, e ben discernendo quegli accidenti, per i quali succede un tale fenomeno di *moto accidentale*, come Egli lo chiama. Ciò che fa resistenza al corso delle acque, dice Zendrini, oltre gli accidentali impedimenti di gombiate, e d'altri ostacoli, si è il perpetuo soffregamento, che l'acqua è obbligata di fare contro le ripe, e contro il fondo, dal che nasce, che l'acqua progredisce più con le sue parti alte, di quello che con le parti vicine al fondo, di modo che l'acqua non sostenuta per difetto di quella che più tarda la segue, cade e stramazza dall'alto sull'acqua della spiaggia.

14. La prima di queste riflessioni riguarda gli ostacoli che possono trovarsi nel fondo, o nelle ripe, per i quali la direzione del corso si rivolga verso l'una o verso l'altra sponda. Possono quindi annoverarsi fra tali ostacoli anche le alluvioni contigue alle sponde, le quali si protraggono dalle ripe oltre la metà della larghezza dell'alveo, e sino alla sponda opposta, alla quale perciò si avvicina il filone. In questo caso resterà a definirsi, se operino come ostacoli, i quali facciano declinare la direzione del moto nel verso della lunghezza, oppure se insieme operino a dare con la loro declività una direzione di moto all'acqua dalla ripa, dove tali ostacoli sono più alti, all'opposta, dove il fondo è più basso. L'altra riflessione di Zendrini, che per le leggi della statica la superficie dell'acqua si mantiene orizzontale tra le opposte

ripe, può convenire all'acqua stagnante, nella quale le pressioni verticali si equilibrano in ogni punto della superficie, ma non all'acqua corrente, nella quale le pressioni sono combinate col moto del fluido, che secondo la varia sua velocità e direzione, accresce o diminuisce l'effetto della pressione. E' vero che le aberrazioni dalla esatta orizzontale non sono facilmente discernibili, e riescono assai tenui in un tratto così ampio, come la larghezza p. e. del Po: ma comunque tenui, l'acqua che non sia di tenuissimo corpo, o altezza le risente. Che poi nella medesima sezione d'alveo non possa camminare una parte dell'acqua verso il suo sbocco, e un'altra parte verso la ripa, questa è una difficoltà, la quale deriva dalla supposizione, che i filamenti de' quali si rappresenta che sia composta la massa dell'acqua corrente in un fiume, giungano con direzione perpendicolare al piano della sezione, ciocchè non è in natura, e si ammette soltanto per metodo di dottrina. Perciocchè appunto in forza degli ostacoli, delle irregolarità dell'alveo, delle pendenze tanto laterali, quanto longitudinali, le particelle dell'acqua concepiscono de' moti obliqui, e tutte non seguono nello stesso istante la medesima direzione. Così quando si sta osservando l'uscita de' fluidi dai fori aperti ne' fondi de' vasi, se come pare all'occhio la superficie del fluido si supponga esattamente orizzontale nella sua discesa, non si giunge mai a comprendere, come ne succeda l'uscita, ed è forza di ammettere de' moti obliqui nelle particelle del fluido, i quali poi compariscono evidenti o nelle piccole particelle di diverso colore confuse nell'a-

equa, o nella contrazione della vena. Il caso poi nel quale secondo Zendrini, si può verificare, che la spiaggia rivolti l'acqua a caricare il filone, si espone da lui in questo modo. Può avvenire, che l'acqua viva di una sezione si trovi in qualche parte di sì poca altezza, sicchè le resistenze del fondo propaghino sensibilmente l'effetto loro a tutta l'altezza viva, e tolgano ad essa del tutto, o quasi interamente, il moto progressivo, col quale l'acqua sarebbe proceduta parallelamente al filone del fiume, sicchè resti stagnante, o quasi stagnante. Il filone non ritardato potrà restare di livello alquanto più basso, di quello che l'acqua ritardata vicino alle ripe, la quale perciò potrà per sì fatto sbilanciamento essere rivolta verso il filone; e se questo si trova assai vicino ad una ripa, verrà essa ad esserne maggiormente caricata, e se ne accrescerà la corrosione.

15. Una cagione della doppia pendenza degli alvei deriva dalla Topografia de' paesi, cioè dalle varie inclinazioni della superficie terrestre. Leggonsi delle osservazioni intorno ai torrenti del Friuli, per le quali si vede, che i loro alvei hanno due inclinazioni, una da Tramontana al Mezzodì, l'altra da Levante a Ponente, la prima dimostrata dal corso dell'acqua, l'altra dall'appoggio delle acque alle ripe verso Ponente, onde avviene che queste siano soggette a maggiori corrosioni delle opposte che sono verso Levante. Il Signor Generale d'Artiglieria Andreossy, nelle belle sue memorie dell'Istituto d'Egitto, e nel pregevolissimo e istruttivo suo libro sul canale del mezzodì, stabilisce per molte osservazioni, che le a-

cque de' fiumi hanno due pendenze, una nella direzione della lunghezza, l'altra dipendente dalla generale topografia del terreno, la quale determina la corrente principale del fiume ad investire più particolarmente quella delle due ripe, che si trova al lato opposto al piano della pendenza generale. Quella pendenza che deriva dalla topografia generale del terreno, determina la corrente principale, cioè quella seguita dalla navigazione, che si tiene più vicina ad una ripa che all'altra; la quale però è disviata talvolta dalla sua direzione per gl'interramenti, che si formano dallo stesso lato, per lo sbocco di qualche influente, per lo sporgimento dalle ripe di qualche ostacolo naturale, quale sarebbe un adunamento di materia franata dalle ripe, o artificiale, come la costruzione di qualche opera respingente. La direzione della corrente principale, fuori delle anomalie indicate, corrisponde all'intersezione del piano di pendenza generale nel verso della lunghezza, col piano di contropendenza de' terreni. Si può è vero immaginare ed eseguire ancora un alveo, il quale indipendentemente dalle inclinazioni del terreno, abbia una data pendenza verso la sua foce, e il suo fondo orizzontale nel verso della larghezza, con le sponde similmente convergenti. Ma per opera della natura, gli alvei si conformano in generale alla doppia pendenza de' terreni, e ne' tratti particolari non seguono già la linea più breve, che sarebbe quella determinata dall'azione della gravità, ma quella che per l'indole del suolo è la meno resistente.

16. Si può rappresentare l'effetto della doppia

pendenza, supponendo che (Fig. II Tav. III) $BEFM$ sia un piano rettangolo inclinato all'orizzonte sotto l'angolo AMB . La sezione comune di questo col piano orizzontale sia la retta MF , la quale taglia ad angoli retti i lati BM , EF . Un grave posto in B , o in E , o in qualunque punto tra B e E , prescindendo dalla direzione che si può alterare dallo sfregamento, o da altri ostacoli, discenderà da B per la linea BM perpendicolare alla MF , e parimente da E per la linea EF perpendicolare alla stessa MF , o per un'altra retta tra BM e EF parallela a queste; e se il piano avesse due margini elevati lungo i lati BM , EF , il grave striscierebbe lungo questi margini senza imprimervi alcun urto: o mancando i margini elevati, non uscirebbe il grave nè da uno nè dall'altro lato del piano. Ora si supponga che il piano rettangolo s'innalzi girando intorno al lato EF , il quale resti fermo nella sua posizione, sicchè si disponga in $ECQF$: e intendasi prolungato lo stesso piano, sicchè vada ad incontrare il piano orizzontale in VFN . Il grave ora posto in C discenderà per la linea CG perpendicolare a VFN , e per conseguenza andrà ad urtare il margine EF sotto un angolo tanto maggiore, e più vicino al retto, quanto maggiore sarà l'elevazione acquistata dal piano nella sua elevazione e volgimento intorno ad EF . Discenderà il grave per CG con un movimento composto di quello che acquisterebbe discendendo per la linea inclinata CQN , e di quello che acquisterebbe insieme discendendo per la linea inclinata CEV . E poichè gli spazj percorsi in tempi eguali da gravi discenden-

ti dalla stessa altezza per linee diversamente inclinate sono come i seni degli angoli d'inclinazione delle stesse linee, se ne'lati del piano rettangolo si prenderanno due linee CS , CP nella ragione dei seni degli angoli CNA , CVA , si avrà la posizione della retta CG nel piano di doppia inclinazione.

17. Ancorchè la discesa dell'acqua per un piano inclinato non si faccia allo stesso modo, come la discesa di un solido, perchè la massa dell'acqua essendo fluida cambia la sua figura, prendendo quella dell'alveo, e delle sezioni per le quali passa, e quella che le imprimono le varie direzioni di moto comunicato alle sue parti, dilatandosi dove non sia sostenuta, laddove la massa del solido che discende per un piano inclinato, conserva la sua figura, e la posizione rispettiva delle sue parti; tuttavia è certo, che è sempre la forza di gravità quella che sollecita la discesa per il piano inclinato, tanto del fluido, quanto del solido. Laonde, se il letto del fiume inclini tutto da una ripa all'altra, essendo già inclinato per il verso della sua lunghezza, si comprende agevolmente, che per questa doppia pendenza, la direzione del moto dell'acqua discendente, dovrà essere obliqua alla linea del più basso fondo, e sotto un angolo vario in ragione delle due pendenze, siccome si rappresentò con la figura. Percuoterà dunque la ripa contro la quale discende non solamente nella direzione indicata per il verso della lunghezza, ma ancora in una direzione inclinata sotto l'orizzontale, cioè verso la base della ripa più profonda. Quindi secondo la resistenza che incontrerà nel terreno, produrrà una corrosione, un

seno, una lunata, e un maggior fondo più o meno discosto dalla ripa stessa.

18. Si supponga ora che le pendenze laterali si estendano sino alla metà della larghezza dell' alveo. L'azione delle due masse d'acqua discendenti col moto composto sopra indicato da amendue le parti, sarà d'incontrarsi a vicenda, d'appoggiarsi l'una all'altra, di promoversi entrambe con una velocità comune a tutte due, producendo quel maggior corso, che si osserva nella linea del maggior fondo, che si conosce col nome di filone, o spirito, del fiume. Che se la pendenza nel verso della lunghezza sia piccola, o anche nulla, e se il fondo dell' alveo fosse acclive, l'effetto delle laterali inclinazioni non isvanirebbe per questo, ma si comporrebbe con la velocità preconcipita dal fluido nella sua precedente discesa. Non già, che se la pendenza delle sponde mancasse affatto, e le ripe fossero tagliate a piombo, e il letto fosse e per lunghezza e per larghezza orizzontale, ma con la foce aperta, l'acqua non fosse per fluire, sopravvenendone di nuova. Essa fluirebbe per l'altezza della sua mole, disponendo la sua superficie ad una inclinazione verso l'estremità del suo corso, cioè verso la foce. Ma quì consideriamo gli alvei come sono naturalmente conformati, e come riduconsi, anche nel caso che originariamente avessero le sponde verticali, o col mezzo delle posature delle torbide, o con quello dello scavamento, ne' quali non si può trascurare l'effetto delle inclinazioni laterali delle sponde, per la modificazione dei moti dipendenti dalla forza acceleratrice della gravità.

19. Osservansi ne' fiumi quando sono in piena due particolari fenomeni relativamente al filone. Uno è che nella linea di questo l'acqua colmeggia, e la superficie del fiume nella larghezza si dispone in una linea curva che ha la sua convessità rivolta all'insù. Questo fatto si rimarca con maggiore evidenza nella piena de' fiumi larghi, di molta mole d'acqua corrente, e di corso veloce. Io ho veduto con tanta chiarezza questa convessità nella superficie dell'acqua del Rodano a Lione, in giornate nelle quali quel fiume era ricco d'acqua più del solito, e nell'Adige ancora, e nel Po in istato di piena, che non saprei dubitare del fatto, nè attribuirlo ad errore ottico. L'altro fenomeno è che il filone, in alcuni tronchi dello stesso fiume non si mantiene nella stessa linea in magra, e in piena, ma si muta di linea: e di più che nelle piene si producono oltre il filone principale de' filoni secondarj. Il primo di questi fenomeni si può spiegare considerando, che le due masse d'acqua le quali discendono con direzioni convergenti tra di loro, e convergenti col fondo, s'incontrano ad ogni successivo istante, e non possono immediatamente confondersi, o spianarsi verso l'una o l'altra parte dell'alveo, ma si fanno reciprocamente ostacolo, e perciò nell'incontro s'inalzano. Dove l'altezza della piena non è congiunta con molta velocità di corso, questo colmeggiamento non è tanto evidente e osservabile, come nemmeno ne' fiumi in istato di acqua ordinaria, o magra, ed ancorchè vi debba essere, è però così tenue che si rende indiscernevole, particolarmente ne' fiumi minori, e di alveo poco largo. Si è

attribuito il colmeggiare del filone da rispettabili autori, ad ogni ritardo che il fiume incontra nel suo corso, dove questo è più veloce, e dove per conseguenza tanto più prontamente dee alzarsi di superficie per ogni ostacolo che vi si opponga. Ma questi ritardi, e questi ostacoli, affinchè si trovino regolarmente, quando il fiume va in piena, non si possono ripetere, se non che dall'incontro delle due masse d'acqua convergenti con la direzione del loro moto l'una verso l'altra, e nella linea del maggior fondo. Fu per verità con altra ingegnosa conghiettura spiegato questo fatto del colmeggiare del filone. L'acqua vicina alle ripe si muove, fu detto, con velocità minore di quella che ha nel luogo del maggior fondo: esercita essa dunque una pressione verticale maggiore di quella che scorre nel filone. Perciò a mantenere l'equilibrio trasversalmente nella superficie del fiume, è di conseguenza che sia più alta dove è meno premente, perchè è più veloce. Per occasione di questa conghiettura si può osservare la difficoltà di ragionare intorno ai moti ed effetti delle acque con qualche grado di evidenza, dacchè la stessa osservazione della velocità dell'acqua diminuita alle ripe ed accresciuta nella linea del filone, fece dedurre al Zendrini, siccome abbiamo notato (§ 14) una conseguenza affatto contraria, cioè, che l'acqua dalle ripe si porti verso il filone. Il supposto equilibrio della superficie dell'acqua attraverso del fiume, per cui si disponga all'orizzontale, non ha luogo quando essa è corrente, ed essa prende in superficie visibilmente anche dei moti dal mezzo verso le ripe.

Spargendo de' galleggianti sulla superficie di un fiume corrente con notabile velocità, alcuni di' essi vegghionsi tenere la via del filone, altri de' quali la seguono costantemente per lunghi tratti, altri ne sono rispinti e allontanati, i quali declinano verso le ripe, nè al filone ritornano. L'acqua dalla maggiore altezza del filone si rovescia in parte verso le ripe, e allontana que' galleggianti che trovansi agli estremi confini della larghezza del filone, spingendoli verso le ripe.

20. L'altro fenomeno del mutamento di linea del filone dalla magra alla piena, ha luogo bene spesso ne' fiumi molto larghi, e dove una parte della sezione dell'acqua in piena è occupata da isole, o renaj elevati irregolarmente, o distaccati o aderenti alle ripe, e variamente prolungati nell'alveo, i quali nello stato di magra sono scoperti, e nelle piene restano sotto la superficie dell'acqua. Il corso del fiume in questi casi è diversamente modificato, e come se si facesse in due alvei diversi, particolarmente perchè le pendenze laterali si diversificano, e in conseguenza si altera il luogo d'incontro delle masse d'acqua, e la direzione del filone. E quanto a ciò che si osserva ne' fiumi di molta larghezza, qual è in più luoghi il Po, che nelle piene oltre il filone principale, se ne producano de' secondarj, questo dipende dagli ostacoli sopra indicati, e dalla conformazione del fondo, il quale, siccome si può osservare in molte sezioni, è solcato a maggiore profondità in più di un luogo della sua larghezza. Questi solchi continuati e più profondi di quello che siano nel restante letto,

fanno riconoscere i moti laterali delle correnti, le quali si dividono in corsi diversi, e reciprocamente si formano i loro confini, segnando insieme i moti della massa totale nel verso delle lunghezze.

21. Le pendenze laterali insieme con quelle per il verso della lunghezza, fanno sì che il movimento dell'acqua ne' fiumi non abbia una direzione parallela al fondo, ma inclinata, e che lo incontra con un certo angolo d'incidenza. Quindi è che il corso dell'acqua si rende atto ad escavare il fondo dell'alveo, e l'escavazione si fa segnatamente nelle piene, ciocchè dal solo soffregamento non si otterrebbe. Si pareggia però questo effetto con la resistenza, o tenacità della materia del suolo, ne' fiumi, che perciò diconsi stabiliti, e ne' quali non si altera la conformazione delle loro sezioni. Avviene lo stesso anche in alcune svolte degli alvei, nelle quali l'acqua scorre senza punto agire nelle ripe per corroderle, e che perciò ben di rado riduconsi con profitto a rettifili. Se la pendenza laterale si estende, il fondo al terminare di questa si escava, qualora non sia di molta tenacità; si fa più breve l'estensione della pendenza opposta e più ripida, e la larghezza dell'alveo si diminuisce. Di ciò se ne ha l'esempio nelle sezioni IV. V. VI. Tav. II, nelle quali la larghezza è molto diminuita, le sponde sono ripide, e le profondità insigni: le quali profondità non sono già gorgi di acque stagnanti, mentre col corso degli anni si sarebbero riempite con le posature delle torbide, ma bensì parti delle sezioni dell'alveo, nelle quali l'acqua è corrente, ma con direzioni più inclinate di

quelle che seguono nella superficie del fiume. Al contrario in altre sezioni, quali sono nella Tav. II le II, e III si ha l'esempio di larghezze ben grandi, di pendenze laterali piccole, e di profondità minori. Galileo, scrivendo al P. Castelli, ghiribizzava, dic'Egli, intorno agli effetti delle acque nel passare dalle sezioni più larghe alle più strette. Volendo supporre, che le parti dell'acqua continuino a muoversi nella stessa linea retta, è affatto difficile, per non dire impossibile comprendere, come si faccia questo passaggio, appunto come nell'uscita dell'acqua dal foro aperto nel fondo di un vaso non si può intendere che le sezioni nel vaso discendano tra di loro parallele.

22. E' forza di riconoscere, che nel corso delle acque si producono de' moti obbliqui, e che attesa l'incompressibilità delle sue parti, dee succedere nella sua superficie qualche mutazione di livello, tanto nel passaggio dalle sezioni più larghe alle più strette, quanto da queste a quelle. La pendenza delle sponde nel passaggio delle acque dalle sezioni larghe alle strette aumenta i moti obbliqui, e il fondo si escava, o l'alveo è più profondo: nel passaggio dalle sezioni strette alle più larghe, per l'espansione del fluido si diminuisce l'azione delle pendenze laterali, e l'alveo è meno profondo. Hanno tra di loro uno stretto rapporto la larghezza dell'alveo, la profondità, la cadente, il corpo d'acqua, l'inclinazione delle sponde, e questi elementi tutti si modificano diversamente per l'indole del suolo, nel quale l'alveo è solcato, più o meno resistente all'azione della corrente. In alcuni fiumi scorre in un tratto l'acqua con placido mo-

to, con molta espansione, in un altro è rapida, e ristretta per l'indole del suolo resistente. Quindi è che nel divisare i tagli delle svolte de' fiumi, per farne dei rettifili si procura di conoscere tutti quegli elementi: i quali poi si contemperano tra di loro con quelle leggi che si conoscono dal fatto, e che non si possono presagire con precisione, ond' è che ne' progetti di tali opere, prudentemente facendo, si debbono calcolare gli effetti e le misure con certa latitudine. Si consiglia non di rado per vedute economiche di non escavare per intero in profondità e in larghezza il nuovo alveo, ma di segnare al nuovo corso la strada con una cunetta, affinchè la forza della corrente la dilati e la escavi, trasportando la materia eccedente, e riducendo l' alveo proporzionato al fiume. Questo consiglio però è da seguirsi cautamente, e facendo prima molti scandagli del suolo, essendo restata in tali imprese non di rado delusa questa speranza, o perchè l' alveo non si allargò, nè si approfondò per la resistenza del terreno, o perchè il corso dell' acqua incontrando de' terreni cedevoli ha preso delle direzioni tortuose, trasportando il filone più da una parte che dall' altra, alterando le pendenze laterali.

23. L'azione dell' acqua corrente nel fondo e nelle sponde dell' alveo è di soffregamento, e d' impulso in quella direzione che risulta dal moto composto per le due pendenze, longitudinale, cioè, e laterale. Per questa ragione non si può paragonare il corso de' fiumi con quello che si fa per doccie di legno, o per piccoli canali artefatti, ne' quali la larghezza, e la pendenza delle sponde per la loro piccola misura non

danno effetti discernevoli di questa composizione di moti, e la resistenza della materia, nella quale è scavato l'alveo artefatto, è tanto dissimile da quella de' varj terreni. Il soffregamento dell'acqua con la superficie dell'alveo si riguarda da alcuni come la cagione principale per cui il di lei moto si riduce all'uniformità, distruggendosi per esso gl'incrementi di velocità prodotti dalla forza acceleratrice di gravità. Quindi riflettendo che il soffregamento varia nella sua misura, secondo che l'area della sezione del fiume ha una diversa ragione al suo perimetro, che è al contatto dell'acqua, si è istituita una ingegnosa teoria. L'area d'ogni sezione è sempre il prodotto del suo perimetro, che è al contatto dell'acqua, per una linea retta che si può determinare. Se la sezione è un semicircolo, l'area è il prodotto della semicirconferenza moltiplicata per la quarta parte del diametro. Quindi dividendo il numero di unità quadrate che esprime l'area della sezione, per il numero di simili unità ma lineari, che esprime il perimetro al contatto dell'acqua, in qualsivoglia figura, si avrà la linea ricercata, cui si dà il nome di raggio medio. Quanto maggiore è questo raggio medio tanto minore è la misura del soffregamento, perchè tanto minore è il perimetro della sezione di area eguale. Così se vi siano due sezioni triangolari di base e d'altezza eguale, e una di queste sia isoscele, l'altra scalena, poichè il perimetro della isoscele è minore di quello della scalena, il raggio medio della isoscele sarà maggiore di quello della scalena, e dimostrerà che la misura del soffregamento è minore nella iso-

sce di quello che nella scalena, e in conseguenza che il corso dell'acqua è meno ritardato nella prima, di quello che nella seconda. E poichè per ambedue queste sezioni, che si suppongono prese nello stesso fiume, dee passare in pari tempo la medesima quantità di acqua, dovrà seguire, che la sezione scalena si allarghi, o si faccia più profonda, oppure se la materia del suolo resiste e lo impedisce, dovrà aumentarsi l'altezza dell'acqua e l'inclinazione della superficie, per compensare coll'aumento della forza acceleratrice il decremento della velocità derivante dal maggiore soffregamento. La sezione scalena rappresenta l'alveo di pendenze laterali dissimili, e il conseguente accostamento del filone ad una ripa più che all'altra. Corrisponde perciò questa teoria all'effetto indicato da Guglielmini (§ 12) del maggiore impulso dell'acqua che nelle piene si fa dalla parte del maggior fondo dell'alveo, ed all'avvertenza di costruire l'argine dalla stessa parte più alto e più robusto: non risulta però dalla stessa, perchè la superficie del fiume non sia trasversalmente orizzontale, ma inclinata e ascendente verso la parte del maggior fondo, come avvertì il citato maestro. La teoria del raggio medio non include le altre circostanze che debbonsi valutare nel corso dell'acqua. Si possono avere delle figure di sezioni, nelle quali con dissimili altezze, e larghezze, essendo le sezioni eguali si abbia lo stesso raggio medio. Una sezione rappresentata da un quadrato è eguale nell'area e nel perimetro (s'intende sempre del perimetro a contatto dell'acqua) ad una sezione rettangolare, la quale

abbia la base doppia del lato del quadrato, e l'altezza eguale alla metà dello stesso lato. Si può fare un triangolo isoscele di larga base, eguale ad un altro triangolo isoscele di base minore, della stessa area, e dello stesso perimetro, inteso come sopra, ma di maggiore altezza. In questi casi si avranno altezze d'acqua, e larghezze d'alveo diverse, e lo stesso raggio medio. Si potrà perciò dedurre, che posta la stessa pendenza del fondo, non induca alcuna differenza nel corso dell'acqua la maggiore o minore larghezza della sezione, o la diversa profondità del corpo d'acqua, perchè i ritardi nascenti dal soffregamento sono eguali, essendo eguale il perimetro, cioèchè non è conforme ad altri ricevuti principj e teorie.

24. La misura del soffregamento dell'acqua con i corpi solidi, lungo i quali essa si muove, si ha da varie sperienze fatte ne' tubi e piccoli canali artificiali. Ma o la piccolezza di questi, o l'altezza dell'acqua nel vaso dal quale partono i tubi, malagevole da conservarsi costante, o la difficoltà di prendere le precise misure dell'effetto, lasciano sempre molta dubbiezza. Le sperienze istituite alcuni anni or sono con ingegnoso e dispendioso apparecchio da una società di Londra, diretta ai progressi della navale Architettura, riescono più soddisfacenti. Si sono preparati due panconi, o grosse asse, una lunga piedi 14, larga pollici 20, grossa pollici 3: l'altra lunga piedi 2, larga e grossa come la prima. Amendue furono spianate, e dipinte a oglio nello stesso modo. Immerse di taglio verticalmente, e disposte secondo la lo-

ro lunghezza orizzontalmente, nell' acqua di mare, quieta, in un' ampia e profonda vasca, col loro centro di figura a sei piedi sotto la superficie dell' acqua, si sono fatte muovere in direzione orizzontale, con nota ed uniforme velocità, mantenute sempre alla stessa profondità d' immersione. I dodici piedi di maggiore lunghezza di uno de' panconi facevano provare allo stesso una resistenza procedente dallo sfregamento maggiore di quella che provava il pancone più corto. La superficie del pancone più lungo, comprese tutte le sue facciate è di 46 piedi quadrati. Quindi dividendo per 46 questa resistenza maggiore, si ebbe la misura della resistenza derivante dal soffregamento, che prova un piede quadrato di superficie mossa con nota velocità. Si rimarcò una differenza nella misura della resistenza che provarono li suddetti panconi messi all' esperienza, asciutti la prima volta, indi dopo che erano stati più volte immersi e immollati nell' acqua. Il soffregamento si trovò maggiore in questo secondo caso. Nella seguente tavola si ha il risultato di queste sperienze.

Velocità di miglia nautiche all' ora. Le miglia nautiche sono di piedi 6087	1	2	3	4	5	6	7	8
Soffregamento coll' acqua di un piede quadrato di superficie del pancone immollato.	$\frac{R}{0,014}$	$\frac{R}{0,047}$	$\frac{R}{0,095}$	$\frac{R}{0,155}$	$\frac{R}{0,266}$	$\frac{R}{0,369}$	$\frac{R}{0,460}$	$\frac{R}{0,501}$
Soffregamento coll' acqua di un piede quadrato di superficie del pancone non immollato.	$\frac{R}{0,012}$	$\frac{R}{0,043}$	$\frac{R}{0,080}$	$\frac{R}{0,144}$	$\frac{R}{0,209}$	$\frac{R}{0,279}$	$\frac{R}{0,354}$	$\frac{R}{0,432}$

Se i panconi oltre l'essere stati immollati erano imbrattati di fango, o altro sucidume, la resistenza riusciva maggiore di quella che provavano essendo tersi. E' pertanto evidente, che le resistenze derivanti dal soffregamento, crescono con la velocità accresciuta, e la ragione degli accrescimenti si avvicina a quella de' quadrati delle velocità, alla quale però non giunge mai.

25. Gli effetti, i quali si comprendono col nome di soffregamento dell'acqua con i corpi solidi, sono relativi alla scabrosità degli stessi solidi, all'attrazione dell'acqua con essi, e all'aderenza delle parti dell'acqua tra di loro, cui si dà il nome di viscosità. La scabrosità de' solidi significa che vi sono delle particelle sporgenti, e delle altre avvallate nella loro superficie. Quando dunque il solido si muove nell'acqua, le particelle sporgenti urtano la massa del fluido, e diminuiscono la velocità del solido, che comunica coll'urto al fluido una parte della sua forza, o quantità di moto. La sperienza del soffregamento maggiore osservato ne' panconi immollati, a confronto dei non immollati vi consente; giacchè dall'essere stati immollati deriva, che la loro superficie sia divenuta più scabra, gonfiandosi le fibre del legno, e risalendo dalla superficie. Si ha di ciò un'evidenza in grande nelle navi, le quali, essendo pari tutte le altre circostanze, sono di gran lunga più spedite e veloci, quando la loro opera viva è ripulita dal musco, dalle chiocciole, dal fango che la imbratti, di quello che se sia da simili corpi coperta. La fodera che si fa alle navi con fo-

gli di rame, tirati a cilindro, e levigati, oltrechè le garantisce dai danni delle teredini marine, giova grandemente alla velocità del loro corso. Corrisponde perciò molto bene la sperienza, la quale dimostra che il soffregamento dell'acqua con i solidi, segue la ragione di una qualche funzione della velocità, e non è lo stesso in qualunque ipotesi di velocità attribuita al solido che si muova nell'acqua, o dell'acqua che strisci contro il solido. Per lo che si può inferire, che la teoria del raggio medio non comprende tutte le circostanze del moto dell'acqua negli alvei, e singolarmente l'elemento della velocità.

26. L'aderenza delle parti dell'acqua alla superficie de' solidi è assai comprovata dalla volgare osservazione, che quasi tutti i corpi posti al contatto dell'acqua, restano più o meno bagnati, e molli. Anche i corpi, i quali non hanno una forza di capillarità rispetto all'acqua, pure esercitano con essa un'attrazione. Le sperienze le quali dimostrano, che deschi simili in grandezza, e figura, di metallo, di pietra, di legno o d'altre sostanze posti orizzontalmente al contatto dell'acqua, richiedono una forza diversa per esserne distaccati per sollevamento verticale, comprovano questa asserzione.

27. Si aggiunge la viscosità dell'acqua, per cui le sue particelle fanno qualche resistenza a distaccarsi l'una dall'altra. Or come questa contribuir possa a ritardare il moto del solido immerso nell'acqua, o il moto dell'acqua che striscia un solido, si può intendere in questo modo. Le parti dell'acqua spinte e promosse

da un solido che per essa si muova tendono ad equilibrarsi, e ad occupare il luogo abbandonato all'indietro dal mobile. Se la velocità del mobile sia maggiore di quella con cui le parti dell'acqua possono portarsi al luogo abbandonato dal mobile, queste si raccolgono alla parte anteriore dello stesso, ed accrescono la resistenza al suo moto progressivo. In fatti se il solido emerge in parte dall'acqua, questa raccolta d'acqua si rende manifesta dinanzi al solido, ed è tanto maggiore quanto è più veloce il moto del solido. Se l'aderenza delle parti dell'acqua tra di loro e col mobile fosse nulla, è certo che non si farebbe questo adunamento di acqua dinanzi al mobile, nè questo strascinerebbe una quantità di acqua a lui aderente. Tale effetto dee anche succedere nel mobile, che si muove sott' acqua, cioè che strascini seco una mole di acqua a se aderente, e tanto maggiore quanto è maggiore la sua velocità. Ce ne somministra una prova la macchina funicolare, con la quale s'inalza l'acqua per mezzo di una fune che si mette in moto tra due ruote, una bassa ed immersa nell'acqua, l'altra contenuta in un recipiente chiuso. La fune nel passare per l'acqua si veste tutta all'intorno di uno strato di fluido di osservabile grossezza, il quale vi sta aderente sino alla ruota superiore, ed ivi dalla fune stessa si distacca per il moto centrifugo che la ruota gl'imprime, cade nel recipiente, e da questo per una apertura esce all'uso che si vuole. L'aderenza dell'acqua alla fune dipende manifestamente dalla forza capillare della corda, e dalla viscosità dell'acqua. Una certa velocità nel mo-

to della fune produce maggiore grossezza dello strato d'acqua che la riveste, e fa sì che se ne raccolga in un dato tempo maggiore quantità nel recipiente, non solamente perchè nello stesso tempo arriva alla ruota superiore un maggior tratto di fune vestito di acqua, ma perchè il vestimento è più grosso, lasciando un tempo minore alla discesa dell'acqua per la fune.

28. La pressione non accresce il soffregamento delle parti dell'acqua tra di loro, e con i solidi al contatto de' quali essa scorre. Perchè l'acqua o è affatto incompressibile, o è compressibile al minimo grado, e da riconoscersi soltanto, quando sia premuta da forza molto grande, e chiusa in un recipiente di pareti robustissime: quindi la compressione non accresce i punti di contatto tra le parti dell'acqua. Galileo faceva osservare al P. Castelli, che non è necessario che l'acqua premuta si condensi per scappare con maggior impeto; siccome il nocciolo di ciriegia premuto scappa con velocità senza condensarsi. In questo fenomeno di paragone è da osservarsi, e da far conto della elasticità de' polpastrelli delle dita, e di quella ancora del nocciolo di ciriegia. Ma nell'acqua la condizione di ciascuno strato è la stessa, nè per la pressione degli strati superiori succede condensazione negl' inferiori. La resistenza che dee superare un corpo, come anche ogni particella d'acqua che per essa si fa strada, dipende dalla reazione delle parti alle quali si comunica un moto, e dalla viscosità delle parti dell'acque. Questa è indipendente dall'azione della massa sovrapposta. Non così

pare della reazione, la quale sembra dover essere proporzionata al numero delle parti insistenti sopra quella che si muove. Perciocchè siccome ogni corpo cedevole immerso nell'acqua a varie profondità, in ragione di queste si diminuisce di volume e acquista gravità specifica maggiore, così pare che un corpo il quale sia sott'acqua e in essa si muova per qualche direzione incontrar debba una maggiore resistenza a misura che si trova ad una maggiore profondità: proposizione assunta da un celebre matematico, e corrispondente a qualche esperimento fatto in piccole misure, ma che importerebbe molto di fare con un grande apparecchio, e simile a quello di cui si fece cenno al § 24, tenendo il solido che si fa correre sott'acqua a profondità notabilmente diverse: cioè che non si fece a compimento di quella altronde bellissima serie d'esperienze.

29. Considerando però il soffregamento dell'acqua col fondo, o con le sponde di un alveo, composto di parti amovibili, e che presenta all'acqua corrente, come altrettanti piccoli ostacoli nelle scabrezze della sua superficie; avvertendo ancora che la maggior pressione derivante dall'altezza dell'acqua, fa sì ch'essa penetri più addentro nella materia dell'alveo, si può facilmente intendere, come col suo movimento nelle piene distacchi delle parti, e le trasporti seco, e facciasi torbida. Questa specie di soffregamento, se così vuolsi chiamare, in fondi di parti amovibili, è atta a purgare gli alvei dalle posature recenti. Ma se l'acqua stessa artificialmente, e con mezzi esteriori sia intorbidata, sommovendo il fondo,

e facendo sollevare dallo stesso la materia terrestre o sabbiosa, come fu talvolta proposto, per difetto di riflessione, coll'oggetto di scavare gli alvei de' fiumi, la torbida resta sospesa per breve tratto, e ricade, nè si ottiene l'immaginato effetto. Si riferiscono anche delle sperienze fatte in canali artefatti di fondo piano e posto a varie inclinazioni, ne' quali erano sparse varie materie, onde esplorare quale velocità di acqua si richiedesse per promoverle. In questi l'acqua con la velocità di due miglia e mezzo all'ora, promosse e trasportò l'argilla, la sabbia grossa, e la minuta ghiaja: con la velocità di mezzo miglio all'ora, trasportò la terra, ma non la più grossa sabbia. Non si possono però, a mio parere, applicare al corso de' fiumi si fatte sperienze, ne' quali l'altezza e mole dell'acqua, e i moti obbliqui, tanto nel verso della lunghezza, quanto in quello della larghezza, quanto verso il fondo, dipendenti dalle pendenze laterali, fanno degli urti, per i quali si solleva della torbida, e l'acqua non corre, soltanto strisciando sopra la materia del fondo e delle sponde.

30. In questo argomento degli effetti delle pendenze laterali può insorgere una difficoltà, ed è, che la massa dell'acqua, la quale si move nel fiume per il verso della lunghezza, trova sempre luogo da occupare, perchè la precedente si allontana a misura che discende, laddove nel verso della larghezza, poichè ciascuna delle due parti dell'alveo destra e sinistra è occupata dall'acqua non resta luogo al moto da un lato al mezzo della larghezza. La difficoltà però si toglie riflettendo, che trattasi bensì di moti dai

lati verso il mezzo, o anche talvolta da un lato verso l'opposta riva, ma che questi componendosi col moto per il verso della lunghezza, sono di direzione obliqua, e convergenti verso il filone che vanno a formare. Non disconviene a questo proposito il paragone di due fiumi confluenti in un tronco comune, i quali arrivando con quantità di acqua diverse, e con direzioni convergenti, si uniscono in un solo corpo, acquistano una velocità comune, e si adattano ad una nuova, comune, e minore pendenza. La disuguaglianza però de' confluenti induce nel tronco recipiente una direzione di corso più vicina ad una sponda che all'altra, secondo la ragione delle masse, e delle velocità, e secondo la disposizione del fondo nel tronco, formando un solo filone coll' incontro delle loro masse da prima distinte.

31. E' relativo a questa considerazione il consiglio di dirigere le confluenze de' fiumi, che voglionsi fare coll' arte, ad angolo acuto con la linea del corso nel tronco recipiente. Non già che s'ignorino gli esempj somministrati dalla natura, di confluenze a qualunque angolo, non solamente acuto e retto, ma anche ottuso; ma gli uomini i quali non possono mettere a calcolo tutti gli elementi, che entrano nelle operazioni della natura, debbono tener conto di quelle che possono in qualche modo apprezzare. Per altro dove si tratta della confluenza di fiumi grandi, torbidi nelle piene, arginati, soggetti ad escrescenze non sempre contemporanee, quel consiglio non si può seguire, e il luogo e modo della confluenza è disposto dalla natura ben ampio, e tale si dee disporre

dall' arte, sicchè il corso dell' acqua possa farsi per varj angoli nelle diverse circostanze de' fiumi stessi. La resistenza, che la mole e la velocità dell' acqua del recipiente, oppone alla mole e velocità dell' influente, secondo i varj stati di piena, e di magra di ciascheduno: la posatura della torbida, e l'adunamento di materia in quella parte, ove la velocità per il concorso delle acque si diminuisce, la qual parte non ha situazione costante: la disposizione e pendenza laterale delle sponde del recipiente, per cui il maggior corso si fa piuttosto alla ripa dalla quale esce l' influente, di quello che all' opposta, o inversamente: la proporzione delle portate de' fiumi in piena contemporanea, o in piena non contemporanea: i rigurgiti del recipiente nell' influente promossi a varie distanze, secondo la velocità varia di questo, e l' altezza delle piene di quello: l'urto dell'acqua nel solido di angolo acuto compreso tra i due alvei nel luogo della confluenza, qualora così vogliasi dirigere la confluenza, violento alternamente da una parte o dall' altra, secondo che è alternamente in piena o l' uno o l' altro fiume: la resistenza del suolo varia, disuguale, o uniforme ne' dintorni del luogo della confluenza; questi ed altri ancora sono gli elementi che si compongono nel determinare la direzione da darsi all' influente, che non è mai quella prefinita dall' arte, a meno che non si tratti di piccoli canali, regolati, di acque chiare, oppure che l' alveo non sia solcato in un suolo ben saldo, ma un' altra la quale si conosce soltanto dal fatto. Per la qual cosa il partito più sano, ove si tratti di fare una nuova inalveazione e con-

fluenza di un fiume torbido, o torrente in un altro maggiore e perenne, è di dirigere la prima linea del fiume da immettersi ad angolo retto con la linea del corso del recipiente, preparando a quello con sponde o arginature bene disposte uno spazio abbastanza ampio, affinchè tra quelle stabilisca da se quella direzione, che vuole il temperamento delle memorate circostanze. Qualunque angolo fuori del retto sarà casualmente stabilito: le declinazioni dal retto saranno determinate dal complesso delle cagioni operanti sopra ricordate.

32. Non potendosi dubitare, che dove si ha pendenza di fondo la forza di gravità non modifichi il corso dell'acqua sopra di esso fluente, ed osservando in molto numero di sezioni del Po, che l'inclinazione delle sponde trovasi di 10° , 14° , 15° , 20° da una parte, e di 2° , 4° , 5° dall'altra, e che queste eccedono di gran lunga le pendenze del fondo nel verso della lunghezza, non resta luogo a dubitare della modificazione del corso dell'acqua dipendentemente dalle medesime. Tanto più riconoscendosi col fatto, che l'acqua discendente dalla sponda più estesa sulla larghezza dell'alveo carica la sponda opposta, vi si rinsera e vi corrode il fondo e la base della ripa: e dove le sponde sono egualmente inclinate verso il mezzo, restano salve entrambe dalle corrosioni. Dagli effetti grandi e discernevoli debbonsi arguire i meno discernevoli, prodotti bensì dalle stesse cagioni, ma operanti con minore energia: e l'impulso dannoso che deteriora visibilmente una sponda per la troppo protratta inclinazione dell'altra dee convincere che la

pendenza laterale modifica il corso dell' acqua negli alvei de' fiumi.

33. Si può ricercare, se dallo scavarsi il fondo vicino ad una ripa più che all' opposta, derivi l' alzamento di questa, oppure inversamente dall' alzamento di fondo da una parte dipenda la maggiore profondità che si trova, o si forma nell' altra. Il principio delle pendenze laterali dipendenti dalla disposizione topografica de' terreni può in molte occasioni soddisfare alla ricerca. Ma perchè, non ostante questa disposizione, osservansi delle corrosioni e delle botte nello stesso fiume, tanto a destra, quanto a sinistra, e in punti non molto lontani, conviene riconoscere, che lo sviamento della corrente prodotto da nuovi ostacoli, i quali si formino da una parte dell' alveo, e non siano distrutti dal corso dell' acqua, può portarla a scoprire un fondo cedevole dall' altra e produrvi una maggiore profondità. Secondo il parere di Viviani, la formazione delle lunate dipende da un primo intoppo, in cui s' incontra la corrente, di quella grossa materia, che per qualche accidente di smottamento, o frana d' argini, o di ripe si deponga più da una parte che dall' altra, creandone quel rialto, che gretto, piaggione, o renajo si domanda, il quale poi con la naturale sua scarpa, carica la medesima corrente ad offesa della opposta ripa. Giudica Egli ancora, che vi abbia gran parte la pendenza del fondo, se sia molto grande, cioèchè ben corrisponde alle nostre conghietture, giacchè posta la medesima pendenza laterale, se si accresca la pendenza, nel verso della lunghezza, tanto è maggiore

l'energia con cui l'acqua batte la sponda, e si produce la corrosione e la lunata, la quale si va inter-nando, o si allunga sino a che l'impulso dell'acqua si equilibra con la tenacità e resistenza del suolo, oppure sino a che con qualche presidio dell'arte sia arrestato questo effetto.

34. Vi sono in fatti delle svolte ne' fiumi, le quali si possono riguardare come stabilite, cioè tali che si mantengono senza alterazione o detrimento dell'alveo, come per lo contrario ve ne sono di quelle che continuamente si aumentano, e inducono gravi minaccie e danni. Alle prime non vi è motivo di fare alcuna alterazione, e, probabilmente, è per lo meno superflua al sistema del fiume l'operazione di rad-drizzarle col taglio de' terreni. Ma alle svolte progressive, cioè a quelle che per continuata corrosione insenano sempre più nelle terre il maggior corso, se non bastano i lavori, de' quali si dirà tra poco, conviene provvedere coll'apertura di un nuovo tratto d'alveo. Nel divisare uua tale operazione, conviene esplorare diligentemente la direzione della linea del nuovo alveo da aprirsi nel verso della lunghezza, onde non faccia angoli sensibili con le direzioni superiore ed inferiore; studiosamente investigare le pendenze laterali de' fondi e sponde superiori ed inferiori all'alveo da escavarsi; e l'indole del suolo per cui questo passar deve. Non basta la pianta comunque esatta del corso del fiume: ma richiedonsi le sezioni, o profili di qualche tratto d'alveo superiore ed inferiore a quello da escavarsi, onde scegliere i punti del principio e del fine del nuovo, ne' quali la

ineguaglianza delle pendenze delle sponde non sia molto grande, senza di che può avvenire facilmente, che dopo fatto il nuovo alveo, si produca una nuova svolta. Si troverà non di rado doversi principiare e terminare il rettililo in punti diversi da quelli che la sola ispezione della pianta suggerirebbe. E finalmente la cognizione della natura del suolo sarà di tutta importanza, giacchè conviene aver sempre presente, che l'acqua di un fiume non segue la direzione derivata dalla sola gravità, comunque modificata dalle pendenze laterali, ma insieme quella che le è prescritta dalle varie resistenze del suolo che ella dee solcare. Non ripeterò quì la nota dottrina, la quale però richiede attente osservazioni, che alcune corrosioni e nascenti svolte si possono lasciar progredire, se non minacciano situazioni gelose per altri rapporti, perchè già trovano da se il loro limite a misura, che la loro lunghezza, o ampiezza di giro si aumenta.

35. Ne' tratti dove l'alveo del fiume è più profondo da un lato che dall'altro con differenza considerabile, e perciò il fondo discende da una ripa all'altra con molta inclinazione, la sponda corrispondente alla maggiore profondità, non è solamente premuta, ma anche percossa con maggior forza, e siccome si avvertì dietro il sentimento di Cuglielmini dee farsi l'argine più elevato di quello che alla parte opposta. Giovi a questo passo di ricordare la distinzione degli argini, che fa Barattieri, dipendente dalla osservazione delle pendenze laterali. Gli argini giusta il di lui parere, sono o soprastanti, o laterali, o soggiacenti. Soprastanti sono quelli che servono a

limitare le espansioni de' fiumi nelle piene. Tali sono quelli, che si formano nelle campagne, distanti dall'ordinario corso del fiume, e che lasciano un ampio spazio alle acque da espandersi nelle piene. Lateralì sono quelli posti lungo lo stesso alveo, assecondanti il corso del fiume, ne' quali l'acqua non esercita alcun impeto, ma li preme soltanto, e vi produce qualche soffregamento. Finalmente soggiacenti sono quelli eretti dalla parte dove il fiume ha maggior fondo, mentre dalla parte opposta è elevato, e l'acqua discende con moto obbliquo alla ripa di maggior fondo. Queste arginature sono esposte al maggiore pericolo, perchè l'acqua le investe obbliquamente, tanto nella direzione del corso, quanto anche con movimento di caduta dalla superficie verso il fondo. Perciòchè è ben vero, che l'acqua corrente, con la piccola declività di fondo, che hanno i fiumi in pianura nel verso della lunghezza, preme il fondo e le sponde con forza poco minore di quella con cui premerebbe se fosse stagnante, e quindi che gli argini di tutte e tre le suddette denominazioni restano soggetti alla pressione medesima per quanto importa l'altezza dell'acqua che ad essi si appoggia; ma siccome la sola pressione senza energia di moto, e senza direzione di urto, si equilibra con sicurezza mediante la mole di terra configurata in argine, così non induce alcun pericolo, se la massa dell'argine sia bene calcolata rispetto alla misura della pressione, cioèchè facilmente si sa dalla pratica; o facendo riparo alle trapelazioni e alle maggiori vie d'acqua che si aprissero. Ma negli argini soggiacenti, la massa mag-

giore dell' acqua, che ad essi s' appoggia non è soltanto premente; essa è combinata con una forza d'impulso diretta alla loro base, e a tutta la loro superficie.

36. Ho detto, che la pressione dell' acqua è presso che eguale ne' fiumi correnti, a quella che si avrebbe se fosse stagnante. Perchè considerando l' acqua fluente come un grave che discende per un piano inclinato, è certo che la forza acceleratrice per cui è sollecitata a discendere è alla totale della gravità, come il seno d' inclinazione al raggio. Ora questo seno d' inclinazione è così piccolo a confronto del raggio, attesa la tenue pendenza che hanno i letti de' fiumi in pianura, la quale per lo più non arriva a un grado, che la massima parte della forza di gravità s' impiega a premere. Al contrario la forza acceleratrice della discesa si può aumentare in modo che la forza premente si annulli del tutto. L' acqua che in molto volume cade da un' alta soglia si dispone in una curva non sostenuta da veruna parte: alla quale perciò se si applicasse un letto con fondo convesso della stessa curvatura, e con le sponde della stessa figura di quelle che ha l' acqua cadente dalla soglia, è certo che la stessa continuerebbe a fluire, senza esercitare in quel fondo e sponde veruna pressione; prescindendo ora dagli effetti del soffregamento, e dall' aderenza delle parti dell' acqua con le superficie, al contatto delle quali sarebbe.

37. E' un paradosso comprovato dall' esperienza, che la pressione esercitata dall' acqua stagnante nelle pareti di un vaso, si può fare quante volte si vuole

maggiore del suo peso, bastando per ciò aumentare la superficie delle pareti del vaso, senza variare l'altezza dell'acqua, e senza mutarne la capacità in più o in meno. In un vaso cubico dell'altezza eguale all'unità, la pressione che l'acqua esercita nella base e nelle pareti è eguale al triplo suo peso. Se questo vaso si trasformi in un vaso parallelepipedo lungo quattro, alto uno, largo un quarto, la sua capacità è eguale a quella del vaso cubico, la base è eguale a quella dello stesso vaso, e la pressione che esercita l'acqua è eguale a cinque volte e un quarto il peso dell'acqua stessa. Questa proprietà del fluido non si perde, nelle sue varie circostanze di moto, se non quando la velocità che gli si attribuisce lo riduce ad una massa figurata, come avviene in una caduta o in un getto, perchè le sue parti non sono più sciolte, ma ritenute in una figura costante dalle forze che loro vengono impresse. La pressione dell'acqua in un fiume è equilibrata dalla resistenza degli argini, e quindi l'acqua di un angustissimo rivolo, poste eguali le altezze con quelle dell'acqua in un largo fiume, e posta in entrambi velocità eguale, fa egual forza di pressione in entrambi. Ma s'ingannerebbe in questo confronto quello che non tenesse a calcolo i moti obliqui, che l'acqua acquista negli alvei larghi, per i quali esercita un'impulsione nelle sponde e negli argini. Poche zolle di terra rivolte col solco di un aratro bastano a contenere nell'alveo le acque che minacciano di tracimare, quando non esercitano altra forza che di pressione: non così se le acque anche superficiali prendono per qualsivoglia cagione

un corso obbliquo contro questi ripari del momento.

38. Non si discernono con la vista, per lo più, le direzioni particolari delle parti e delle masse minori dell'acqua, allorchè seguono insieme e si compongono con la direzione della massa totale. Nella superficie de' fiumi in istato ordinario o di magra, non si scorge il moto che deriva dalle pendenze laterali: essa apparisce uniforme, piana, e si giudica anche orizzontale da una ripa all'altra. Richiedonsi o grandi masse di fluido aggiunte d'un tratto, o gradi di velocità insignemente accresciuta o diminuita, come avviene per una roita d'argini, per isorgere anche nella superficie i moti obbliqui. Così se da un vaso ripieno si faccia uscire l'acqua per uno o più fori aperti nel fondo e nelle pareti, è certo che si producono nella massa contenuta nel vaso moti di direzioni diverse, e non pertanto la superficie discende nel vaso, conservando apparentemente la sua posizione orizzontale, ma che non è tale, come si fa evidente se i fori si facciano maggiori, o se si osservi la superficie abbassata a certo segno nel vaso, mentre allora si scorge più bassa nel mezzo che ai lati. Queste differenze di livello, e questi moti nelle masse d'acqua che formano un continuo, ancorchè non si discernano con la vista, però si deducono con la ragione. I moti delle acque nella laguna e canali della Città di Venezia presentano un fatto che fa a questo proposito. Un argine ben lungo fatto dalla natura e corroborato dall'arte, separa la grande vasca della Laguna dal mare. Nel restante del suo perimetro è contornata da terre. In questo argine vi sono delle aper-

ture, che diconsi i porti. Entra l'acqua per ciascuno di questi col flusso del mare, e a misura della quantità che entra essa si estende sino a certi confini, giunta ai quali s'incontra coll'acqua che entra dai porti più vicini. Da questi confini, che chiamansi partiacqua, nel riflusso discende l'acqua ed esce per i porti. Le direzioni di questi moti si rilevano bene dai condottieri delle barche per le resistenze o facilità nel progredire, ad occhio non si rilevano, e dimostrano, come nella stessa continua massa di fluido si producano moti di diversa direzione. Ma ancora la corrente costante del mare adriatico per cui radendo i lidi della Dalmazia e dell'Istria, si volge poi seguendo i lidi della Romagna senza mancare nella calma, e senza essere turbata dalla marea, nè dai venti, dimostra che vi sono dei moti particolari nelle acque, e diversi da quelli della massa generale.

39. Ci guida questo argomento a digredire per poco, sopra un fatto che può essere sorgente d'errore, qualora si presuma di giudicare con la sola vista dei moti delle acque. Quando l'alveo di un fiume è attraversato da una o più pescaje poste a certa distanza tra di loro, e il letto sia di uniforme inclinazione dall'una all'altra, ma dopo ciascuna pescaja sia più basso quanto è l'altezza della pescaja, l'acqua magra, o ordinaria, che per esso scorre, manifesta col salto, o caduta da ogni pescaja la differente profondità del letto, ragguagliata ad una data orizzontale. Se le pescaje sono ben alte, questo salto si vede nelle magre e nelle piene: ma se le pescaje siano poco alte a confronto dell'altezza delle piene,

come all'incirca un decimo di queste, quel salto nelle piene non si discerne più, e pare che la superficie del fiume sia parallela ad un letto di uniforme pendenza, perdendosi ogni indizio dell'ostacolo delle pescaje. Questa osservazione ha indotto alcuni a giudicare, che in questi casi le pescaje non solamente non portino l'abbassamento del fiume nel tratto ad esse inferiore ed effettivamente più basso, ma lo tengano a quell'altezza che avrebbe, se scorresse per una linea di fondo, la quale fosse condotta per i cigli di tutte quelle pescaje. Che questo sia un errore, facilmente si dimostra. Perciocchè, supposto che tutte le pescaje riducansi ad una sola eguale per altezza alla somma loro, e il letto sia abbassato come sarebbe dopo l'ultima pescaja, è certo che l'acqua dopo la caduta si ridurrebbe all'altezza che le compete per il suo volume, e per le condizioni dell'alveo, la quale sarà tanto inferiore, rispetto ad una data orizzontale all'altezza dell'acqua sopra la pescaja, quanto è l'altezza della stessa pescaja. Ora non vi è alcuna ragione, perchè un effetto così essenzialmente diverso si debba avere dalla caduta che segue per più pescaje tra loro distanti, o ridotte ad una sola eguale alla somma delle altezze di quelle. Si sa, che ogni pescaja, la quale attraversa un fiume si dee riguardare come il termine di quel fiume, e il principio di un nuovo fiume, nel quale l'acqua acquista quella velocità e altezza, che sono relative alla sua mole, e alle circostanze del nuovo alveo. Quindi posta la stessa mole d'acqua, e le medesime circostanze di pendenza, larghezza, e conformazione dell'al-

veo, non può cader dubbio che l' altezza dell' acqua non si stabilisca nel tronco inferiore alla pescaja, come è stabilita nel superiore, e perciò sarà tanto più bassa relativamente ad una data orizzontale, quanto è più basso l'alveo nel quale essa cade. E' un equivoco quello che si prende giudicando a vista l' andamento del fiume in piena sopra le pescaje, nel quale è soppresso il salto dell' acqua. L' equivoco e si manifesta coll' esperienza istituendo la livellazione, e si toglie con la ragione. L' acqua che cade dalla pescaja perde per un momento il suo moto progressivo, e si alza a maggiore altezza di quella a cui si dispone in progresso. Questo adunamento e altezza maggiore dell' acqua caduta è maggiore se il fiume sia in piena, e quindi apparentemente ma non realmente si sopprime il salto che si vede, quando il fiume ha poca acqua.

40. Ritornando al nostro argomento delle pendenze laterali, si può avvertire che la pratica ha saputo profittare de' moti obbliqui che dalle stesse derivano. Le pescaje che si costruiscono attraverso de' fiumi, obblique alla direzione del loro corso, e col ciglio inclinato all' orizzonte verso una delle loro estremità, servono per aumentare l' erogazione disposta e aperta da quella parte, dove il ciglio è più basso: oppure a rendere più attiva qualche macchina piantata alla stessa parte. Le serre ricordate da Viviani nel canale d' Arno, con la cresta tanto depressa nel mezzo, che per la lunghezza di 40 braccia non si sollevasse punto sopra il piano o fondo naturale del letto, ma fuori di questo tratto andassero soavemente

alzandosi dalle parti con poca sì, ma eguale salita sino alle sponde laterali, non solamente manifestano coll'esperienza l'effetto delle laterali pendenze, ma introducono ancora a ragionare intorno ai ripari che si fanno, o far si possono ai fiumi per procurare una difesa più permanente contro i danni che derivano dalla percossa delle acque correnti nelle sponde.

41. La custodia e governo de' fiumi per la massima parte consiste nel prevenire le corrosioni, nel frenarle, nel sanarle. Ne' fiumi arginati un modo di provvedere a questo danno è di scaricare e ributtare l'argine, lo che significa ritagliare una parte della sua larghezza dal lato del fiume, cominciando da una linea lontana alcuni piedi dal ciglio, e ad esso parallela, o a un dipresso tale, sicchè l'argine acquisti una scarpa inclinata, e la terra che si move serva ad ingrossare l'argine verso la campagna. Con ciò non si fa un rimedio radicale, ma si obbedisce all'andamento del fiume, cedendogli a poco a poco il terreno, sino a che la corrosione col prolungarsi trovi un limite, e cessi di per se, o qualche fortunata combinazione di materia raccolta di nuovo in qualche parte dell'alveo allontani il corso dalla linea corrosa, o se ciò non accade ed insiste il danno, vi si opponga coll'arte un ostacolo più robusto. Questo metodo giova assai volte, e si combina sempre con le vedute economiche.

42. Un altro modo è di cedere alla bella prima il terreno al fiume, e di costruire un argine all'intento a certa distanza, che suole chiamarsi argine di ritiro, o coronella, sulla lusinga che la corrosio-

ne trovi un limite prima di giungere al piede dell'argine. Questo ripiego è più dispendioso e più sicuro, ma non più radicale del precedente: egli è soltanto diretto ad ottenere una dilazione delle maggiori rovine, talvolta fortunata, o ad ischivare il più dispendioso partito, e di esito incerto de' tagli e raddrizzamenti dell'alveo. Dico d'incerto esito, perchè, come ho di sopra avvertito, non basta che il rettililo combini bene in pianta con la direzione del tronco superiore e inferiore, ma importa che le pendenze laterali delle sponde dell'alveo superiore ed inferiore corrispondano, senza di che la dispendiosa opera dell'inalveazione nel rettililo escavato, non riesce conforme alle sperate conseguenze, posto ancora che l'indole del suolo non opponga ostacoli. Così a cagione d'esempio, se si trattasse di provvedere radicalmente alla corrosione e svolta di Po alle Saline, dove è insigne la profondità verso la riva sinistra, e dove senza il dispendiosissimo riparo del molo di sasso ivi formato, avrebbe già quel gran fiume portata la desolazione alla Provincia aggiacente, facilmente si concluderebbe dalla pianta, che con un taglio di meno che un miglio di lunghezza, si potrebbe raddrizzare il corso e togliere il pericolo di quella corrosione, la quale è frenata soltanto con la forza. Ma se esaminando l'alveo di Po, superiormente al principio del nuovo taglio rettilineo si trovasse, che la pendenza laterale del suo alveo fosse dalla destra alla sinistra, e così anche al termine dell'ideato taglio, converrebbe allungare la linea dell'inalveazione, o anche abbreviarla, perdendo piuttosto in qualche parte la

direzione rettilinea, di quello che lasciargli l'intrinseco difetto di piegare col corso alla sinistra. Oltrecciò in questi casi conviene avvertire quale sia l'indole del suolo, mentre se questo è formato da colmate dello stesso fiume sopra fondi di antiche valli, e mal fermi, la velocità accresciuta con i rettifili, può snudare la base degli argini, che ne costituisce la loro maggiore sicurezza.

43. Un'altra classe di lavori per difendere gli argini e le ripe dalle corrosioni, comprende le opere che diconsi munienti, e consistono in rinforzi che si fanno alla base dell'argine nell'alveo con materiali immersi, resistenti più o meno all'azione dell'acqua corrente. Ogni paese, per così dire, ha sovracciò le particolari sue pratiche, relativamente ai fiumi che per esso scorrono, additate dall'esperienza, dall'indole delle materie più facili ad ammannirsi, e specialmente dalle mire al risparmio, restando sempre la lusinga, che possa il fiume da se abbandonare il corso dannoso. I buzzoni, i fagotti, i fassoni, i gabbioni, i volparoni, le volpare, i cantoni di sasso, il sasso sciolto, sono i materiali che si profondano alla base degli argini, e delle sponde corrose, per non cedere al fiume. Nessun materiale però è più atto del sasso per tali ripari, perchè nè si strugge, nè è trasportato dal corso dell'acqua, come succede degli altri, formati con la terra, e legname, anche se la terra che s'impiega sia cretosa e tenace, come d'ordinario si prescrive che sia. Il sasso tutto al più per debolezza del fondo può abbassarsi, e discostarsi alquanto dalla ripa, ma serve sempre di base a quello che vi si sovrappone.

44. Un altro riparo muniente che si pratica con ottimo effetto, è di vestire le ripe e gli argini dalla parte del fiume di piante vegetanti e pieghevoli, le quali rintuzzano alquanto la forza della corrente vicino alla superficie che si vuol difendere dalla corrosione, e soffermano della torbida, che se è soverchia si scarica coll'opera degli uomini. Non si può abbastanza commendare questa maniera di difesa, particolarmente dove queste piante felicemente vegetano, e con le loro radici rendono il terreno dell'argine più resistente alle corrosioni. Per altro non sono più che munienti, e mal si avviserebbe chi giudicasse che potessero resistere all'urto diretto della corrente.

45. Ma ne' fiumi maggiori, e dove l'inclinazione laterale dell'alveo per lunghi tratti fa sì che la corrente percuota le ripe, e minacci più gravi pericoli, debbono aver luogo le difese dette propriamente respingenti, che si conoscono con i nomi di pignoni, speroni, moli, pennelli, traverse. Sebbene questo argomento sia ampio, nè io mi avvisi qui di trattarne in tutta la sua estensione, tuttavolta non è fuori dell'argomento di questa memoria lo spiegare il rapporto ch'esso ha coll'osservazione delle pendenze laterali. Le più pericolose corrosioni succedono sempre, dove la sponda si estende da una parte nell'alveo, e dall'opposta parte è ripida, con fondo maggiore, e il corso più forte. Quindi il provvedimento più diretto dee esser quello che può diminuire la profondità, e allontanare il corso determinandolo a farsi per una linea più lontana dalla sponda, e ver-

so il mezzo della larghezza dell'alveo. Ora il corso dell'acqua in un fiume si può considerare nella direzione dimostrata dalla sua pianta, e nella direzione più occulta, e non meno efficace dipendente dalla figura delle sue sezioni, dalla quale non si dee giammai prescindere. Perciocchè se le tortuosità dell'alveo dimostrate dalla pianta non sono combinate con la molto disuguale inclinazione delle sponde, esse sogliono essere innocue e indifferenti, e ogni artificio e lavoro per toglierle, è, se non dannoso, almeno vano e inutile al buon sistema del fiume. In fatti non possono non aver osservato i pratici, che vi sono delle svolte e storte stabilite e permanenti ne' fiumi, le quali nè si aumentano nè inducono pericoli: come per lo contrario che vi sono dei drizzagni, ne' quali si hanuo minaccie e danni di corrosioni, e che tutto dipende dalla disposizione del fondo e delle sponde. Per la qual cosa si dee comprendere, che l'effetto degli ostacoli respingenti non dipende soltanto dalla direzione della corrente nel verso della lunghezza, ma principalmente da quello stesso composto col moto nel verso della larghezza, per cui sono percossi gli argini e le ripe secondo l'angolo d'incidenza, e insieme con direzione obbliqua all'orizzonte verso la loro base. Giovi rassermare questa proposizione osservando, che si costruiscono talvolta de' moli, o pennelli per animare il corso di un fiume, per uno de' due rami, ne' quali si divide e va a circondare un' isola, e che ne è abbandonato: oppure per determinare la corrente in un alveo di rettificazione escavato di nuovo, onde resti abbandonato quel-

lo per cui da prima scorreva, e che si vuol sopprimere. Il desiderato effetto in amendue questi casi si ottiene più o meno, non già in ragione della direzione più o meno conservata della linea di lunghezza, ma essenzialmente, secondo che il maggior fondo del tronco è dalla parte dell' alveo che si vuol animare, oppure dall' opposta: ferma restando sempre la massima di ben osservare l' indole del suolo, dalla quale dipende che la direzione del corso sebbene dipenda dalla forza sollecitante della gravità, si modifica però dalle varie resistenze del suolo. La sabbia, la ghiaja, la terra sciolta sono superate e rimosse dal corso delle acque, e per queste materie essa si fa strada: l' argilla, la creta, il terreno tenace del fondo delle valli non si supera dal solo corso, e basta questa sola differenza di suolo a rendere vane le operazioni di qualche rettifilo.

46. Se nel caso di grande disparità di pendenza delle due sponde, fosse possibile di riempire lo spazio del maggior fondo in modo, che da questa stessa parte si venisse a formare una sponda molto meno ripida, anzi inclinata a modo sicchè andasse ad incontrare il letto del fiume in un punto della larghezza notabilmente distante dalla ripa, e verso il mezzo: e che questo riempimento fosse di tale materia, sicchè la corrente non valesse a distruggerlo o a sovvertirlo; è certo che si otterrebbe un alveo abbastanza regolare, e che le sue ripe e le sue arginature riuscirebbero difese, e anche immuni dalle botte, e dalle pericolose corrosioni. Questo riempimento avrebbe la figura di un solido prismatico triangolare,

un angolo del quale occuperebbe il maggior fondo, una facciata dello stesso sarebbe applicata al letto del fiume dalla sponda verso il mezzo, un'altra faccia sarebbe applicata alla sponda, e la terza faccia formerebbe il nuovo fondo del fiume, sul quale scorreerebbe l'acqua con la tendenza verso il mezzo della larghezza. Ma in fiume grande, e di molto fondo, un tale riempimento continuato per la lunghezza di una lunga svolta e corrosione, è opera da immaginarsi piuttosto che da proporsi per eseguirla, non essendo le forze de' paesi bastanti a lavori di sì grande importanza. Quindi è derivato lo studio per iscoprire, o tentare almeno, se dividendo la massa totale del solido di riempimento in varie parti, distanti tra di loro a certi intervalli, si possa ottenere dalla posizione successiva delle stesse, che la corrente si porti più lontana dalla sponda, e quindi si procuri una più efficace difesa dalle corrosioni. Generalmente parlando, è questo il fine per cui si costruiscono i moli, i pennelli, i pignoni, l'effetto de' quali dee risultare tanto dalla deviazione del corso nel solo verso della lunghezza dell'alveo, quanto dalla deviazione nel verso della larghezza, trasportandolo dalla vicinanza della sponda verso il mezzo dell'alveo. Convien perciò considerare la figura, e le dimensioni di tali parti del riempimento, l'intervallo dall'una all'altra, l'angolo al quale debbono disporsi con la sponda, e il materiale per costruirle. Non è già che il fiume talvolta non abbandoni di per se qualche dannosa tendenza, particolarmente dove l'alveo è molto largo, dove nelle piene si formano de'

filoni secondarj, e si trasporta per avventura della materia in situazioni utili, senza che vi contribuiscono punto le operazioni fatte dagli uomini; ma sopra queste casualità fortunate, non si dee prudentemente operando, fondare veruna lusinga.

47. La figura di tali parti del riempimento poc' anzi considerato è quella di un solido cuneiforme, il cui asse di lunghezza è ad angoli retti con la direzione della riva, o della sponda. Le sue facciate laterali sono a scarpa, con base quanto si può, maggiore dell'altezza. Quella facciata laterale che è opposta alla corrente comprende con la sua linea di direzione un angolo retto con la direzione della sponda: l'altra facciata laterale comprende con la sponda un angolo ottuso. L'altezza del solido alla riva è di una misura media tra l'altezza dell'acqua ordinaria del fiume, e l'altezza delle sue piene. Questa altezza va decrescendo, per l'inclinazione della facciata superiore dalla sponda verso il mezzo dell'alveo. La figura del solido si va stringendo dalla sponda verso il mezzo, attesa la direzione che si indicò delle due facciate laterali. Essendo ogni fiume più lungo tempo in istato di acqua ordinaria o di magra, che in istato di piena, l'effetto di tale ostacolo sarà continuo, per determinare il corso verso un punto più distante dalla ripa. Con tale disposizione di ripari si moderano, se non si schivano del tutto due gravi inconvenienti, che s'incontrano nella costruzione de' pennelli tenuti ad eguale altezza in tutta la loro lunghezza, e con le facciate verticali. Uno di questi inconvenienti è quello de' moti vorticosi che prende l'acqua, superata che abbia l'estre-

mità de' pennelli, nello spazio che è ad essi immediatamente inferiore: l'altro è quello della caduta dell'acqua dall'altezza del pennello, quando la piena lo supera. Il primo di questi inconvenienti è diminuito, perchè l'acqua non si volge con tutta la sua massa sostenuta dal pennello soltanto all'estremità del medesimo, ma da ogni punto della sua lunghezza e quindi da altezze diverse, e a diverse distanze dalla ripa, nè può unire le sue forze a formare il vortice, come succede, quando superato un ostacolo verticale discende da tutta la sua altezza, e si volge verso lo spazio inferiore al pignone. Il secondo inconveniente è in gran parte diminuito dalla scarpa laterale del pignone opposta al corso, la quale non solamente scema l'effetto nocivo della caduta, ma per la sua posizione relativamente alla ripa, volge il corso non verso la stessa ripa, ma verso il mezzo dell'alveo, combinandosi con quella direzione che l'acqua può prendere discendendo dalla faccia inclinata superiore del pignone.

48. La lunghezza da darsi al solido cuneiforme, e la distanza dall'uno all'altro nella linea della ripa, hanno tra di loro uno stretto rapporto. Siccome uno solo di questi ostacoli non può provvedere ad un tratto assai lungo, così è necessario combinare l'azione successiva di parecchi simili ostacoli, osservando qual effetto produca la lunghezza a ciascuno di essi attribuita per accrescerla poi secondo che risulta dall'osservazione. Per gl'intervalli tra questi ostacoli, conviene dipendere dall'osservazione dell'andamento della corrosione. Perciocchè o questa segue a'un di-

presso la linea della riva, producendo bensì un frodo, ma senza notabile insenatura, oppure al contrario s' interna nella riva, e vi produce qualche lunata. Nel primo caso i pignoni potranno essere a distanze maggiori: nel secondo dovranno essere più vicini. E la misura poi di tali distanze si dee desumere dalle particolari circostanze particolarmente delle profondità, le quali si dovranno superare dalla lunghezza de' pignoni.

49. Il primo pignone è da costruirsi al principio della corrosione; e questo si determina con lo scandaglio, il quale addita il fondo maggiore. La larghezza e la massa di questi pignoni dee essere tale, onde resistere all'urto dell'acqua, sicchè nè la rovesci, nè la disciolga. I pignoni di sasso sono da preferirsi, dove la difesa sia di grande momento, o dove il sasso non porti ad un grave dispendio. Ma questa seconda condizione è così rara, che la composizione de' pignoni si suol fare di buzzoni, o fascioni, disposti a strati ed assicurati con pali fitti nel fondo per gl' inferiori, e in questi per i soprapposti, ripieni di creta, e qualche quantità di sasso, legati fortemente all'intorno: e coperti di sasso, particolarmente alla loro estremità, dove per la figura cuneiforme riescono più estenuati. Ma il quanto di tutte queste misure è sempre oggetto delle particolari circostanze, dalle quali risulta la più giusta estimativa. Il mio divisamento è di mostrare, come a combinare i moti dipendenti dall' inclinazione laterale delle sponde, col moto delle acque di un fiume nel verso della sua lunghezza, la figura descritta e la costruzione de' pignoni

indicata sia per riuscire utile ed efficace ad arrestare il progresso delle corrosioni.

50. Dopo ciò non è da tacersi il sentimento di Barattieri, il quale ancorchè non condanni affatto l'uso de' pennelli e de' pignoni, non è però inclinato ad attribuir loro molta efficacia. Dopo aver Egli addotto varj esempj di simili opere fatte sul Po, e sull' Adda, le quali non riuscirono utili, conchiude che il male cagionato dalle corrosioni de' fiumi sia immedicabile; e che dove si mostra che i pennelli hanno fatto conseguire l'effetto desiderato, conviene sapere, che quel sito fu piuttosto abbandonato per gli effetti della stessa acqua, che perchè lo abbiano forzato le armature delle sponde. Anche Guglielmini in qualche occasioni palesò la sua ripugnanza a sì fatte difese. Quando Egli fu consultato per allontanare i pericoli minacciati dal Po alla Città di Piacenza, pronunciò nella sua Scrittura del 1697 così: „ nel caso nostro nel quale a mio giudizio è possibile col togliere la cagione, di esimersi dai mali effetti della corrosione, non sarei mai autore che si mettessero pennelli di sorte alcuna, che poi finalmente sono tutti rimedj provvisionali; ma bensì che si applicasse all'escavazione di un taglio, il quale quand'anche riuscisse più dispendioso de' pennelli, o d'altri lavori, il che non credo, porta tuttavolta il vantaggio di aver rimediato per sempre. „ Se non che si può osservare esservi molta differenza tra la costruzione de' moli, o pennelli diretti a respingere e forzare la direzione del corso dell'acqua, e la costruzione delle descritte masse cupeiformi ordinata a condurre il cor-

so senza violenza verso il mezzo dell' alveo. Vediamo coll' esperienza, che i tronchi d' alberi forniti de' loro rami e destramente immersi ne' maggiori fondi vicini alle ripe corrose, arrestano i dannosi effetti, favoriscono le deposizioni delle torbide, e sanano talvolta delle corrosioni che sembravano minacciose. Servono con pari utilità i cavalletti formati con legname a guisa di due piramidi triangolari conjugate al loro vertice, i quali o per il proprio peso specifico maggiore di quello dell' acqua, come se sono fatti di rovere, o per il peso aggiunto di sassi, si affondano, e per la loro figura, in qualunque posizione si trovino hanno molta stabilità. Questi artifizj, come anche quelli di riempire i fondi alla base delle arginature in froldo, con sassi, o con altri materiali pesanti, sono mezzi spediti, e si adoperano con frutto, per cominciare quel riparo che portato a maggiori misure si accosta a restituire alle sezioni dell' alveo quella regolarità di figura, dalla quale dipende la maggiore difesa dalle corrosioni. Nella difficile arte del governo de' fiumi maggiori, si può bensì non avere per dimostrate, in senso geometrico, alcune delle operazioni, che si propongono e si eseguono, sicchè si possa rispondere della certezza dell' esito, ma non è poi da ridursi la cosa a tale, che si debbano aspettare dall' eventualità gli effetti che si desiderano. Non è sempre sicuro l' effetto de' pignoni, non è sempre possibile, o utile il riuro degli argini, non è assai volte prudente l' attendere, che la corrosione la quale comincia, giunga al suo limite per rendersi innocua, non è sempre certa la riuscita delle nuove inal-

veazioni col taglio delle svolte in corrosione.

51. I piguoni cuneiformi, de' quali si è detto, non sono già un artificio nuovo. Si sono adoperati, e si adoperano con profitto particolarmente in alcuni tratti del corso del Po, nel Mantovano. Il loro buon effetto appoggia ciò che si è esposto intorno alle pendenze laterali degli alvei dei fiumi, argomento che per la complicazione de' suoi elementi non ammette come nessun altro di quelli che appartengono al governo de' fiumi un rigoroso, e insieme utile ragionamento matematico, e che non pertanto può somministrare agli uomini d'arte l'occasione d'istituire delle utili osservazioni. *Fungar vice cotis.*

2. Le pertiche sono Venete di sei piedi l'una; i piedi di once dodici.

Le dalla ripa destra verso il maggior fondo - Profondità progressive dalla ripa sinistra verso il maggior fondo, scandagliate a distanze eguali nella linea della sezione. Ciascuna profondità è espressa con due cifre numeriche: la prima significa piedi ne' tronchi A, B, e braccia nel tronco C, ed è disgiunta con un punto dalla cifra seconda che significa once. Gli scandagli sono distinti uno dall'altro con una virgola.

4.9,7,10.9,11.0,11.8,13.0,13.4,13.9,14.4,16.1,
10.23.2

1.9,19.0,8.5,6.11,11.8,21.4,22.10,23.2

5.3,6.2,11.0,3.1,3.6,4.0,4.6,5.3,5.8,7.2,8.0,9.8,
9.4,30.6,32.0,32.11

8.5,24.4,32.11

2.0,2.9,3.1,3.11,4.5,5.9,6.8,15.2,19.6,22.6,24.0,

14.3,27.6,29.11,30.0,30.0

0.1,1.1,1.5,1.5,3.3,3.5,8,19.6,22.7,24.5,25.3,27.3,

13.6,25.6,28.0,28.0

4.4,17.10,19.0,20.0,20.0,20.9,20.6,22.6

4.6,7.10,10.0,11.8,13.6,13.3,13.10,14.3,14.7,15.9,16.4,17.4,19.6,20.0,
20.2,20.0,22.6

47+. Le pertiche sono Venete di piedi sei l'una: il piede è d'once 12.

1.0,1.4,1.10,1.4,1.7,2.1,2.4,2.10,3.6,2.10,4.2,
14.0,15.3,17.7,19.0,19.6,20.0,21.6

19.6,21.6,20.1,19.6,21.6

(A) Tronco di Po al Mazzorno nel Dipartimento del Basso Po, lungo secondo la riva destra pertiche 302; secondo la riva sinistra pertiche 282. Le pertiche sono Venete di sei piedi l'una; i piedi di once dodici.

Sezioni in ordine discendente	Larghezza della sezione a fior d'acqua ordinaria	Maggior fondo della sezione	Distanza del maggior fondo dalla riva destra	Distanza del maggior fondo dalla riva sinistra	Distanza della sezione susseguente dalla precedente presa lungo la riva destra	Distanza della sezione susseguente dalla precedente presa lungo la riva sinistra	Angolo d'inclinazione all'orizzonte della sponda destra	Angolo d'inclinazione all'orizzonte della sponda sinistra	Profondità progressive dalla riva destra verso il maggior fondo scandagliate a distanze eguali nella linea della sezione. Ciascuna profondità è espressa con due cifre numeriche; la prima significa piedi ne' tronchi A, B, e braccia nel tronco C, ed è disgiunta con un punto dalla seconda che significa once. Gli scandagli sono distinti uno dall'altro con una virgola.	Profondità progressive dalla riva sinistra verso il maggior fondo, scandagliate a distanze eguali nella linea della sezione. Ciascuna profondità è espressa con due cifre numeriche; la prima significa piedi ne' tronchi A, B, e braccia nel tronco C, ed è disgiunta con un punto dalla cifra seconda che significa once. Gli scandagli sono distinti uno dall'altro con una virgola.
I	Pertiche 148	Piedi 23 . 2	Pertiche 95	Pertiche 53			2° . 19'	4° . 4'	1.10,5,8,6,9,6,9,4,8,14,9,7,10,9,11,0,11,3,13,0,13,5,13,9,14,4,16,1,17,3,19,120,0,11,0,22,0,23,2	1,9,19,0,8,5,6,11,11,8,21,4,22,10,23,2
II	P ^e . 123	Pi. 32 . 11	P ^e . 112	P ^e . 11	Pertiche 114	Pertiche 140	2° . 44'	26° . 34'	1.10,12,0,22,2,2,4,13,19,5,3,6,2,11,0,3,13,6,11,0,4,6,5,3,5,8,7,2,8,0,9,8,14,0,16,8,18,0,25,4,19,4,30,6,32,0,32,11	8,5,2,1,4,32,11
III	P ^e . 117	Pi. 30 . 0	P ^e . 97	P ^e . 20	P ^e . 32	P ^e . 33	2° . 32'	14° . 3'	2,0,2,2,0,1,11,1,11,2,0,2,9,5,13,11,4,5,5,9,6,8,15,2,19,6,22,6,24,0,27,7,29,0,20,0,30,0	14,3,27,6,29,11,30,0,30,0
IV	P ^e . 120	Pi. 28 . 0	P ^e . 105	P ^e . 15	P ^e . 41	P ^e . 31	2° . 33'	17° . 15'	1,0,1,6,1,6,1,2,0,10,1,0,1,1,1,5,1,5,3,3,5,8,19,6,22,7,24,5,25,3,27,3,27,0,27,10,27,0	13,6,25,6,28,0,28,0
V	P ^e . 154	Pi. 20 . 9	P ^e . 57	P ^e . 97	P ^e . 115	P ^e . 88	3° . 21'	2° . 50'	2,1,1,0,3,9,6,0,10,8,14,17,10,19,0,20,0,20,0,20,0,20,0,20,6,22,6	4,6,7,10,10,0,11,8,13,6,13,3,13,10,14,3,14,7,15,9,16,4,17,4,19,6,20,0,20,2,20,6,22,6

(B) Tronco di Po alla Retinella nel Dipartimento del Basso Po, lungo secondo la riva destra pertiche +36; secondo la riva sinistra pertiche +74. Le pertiche sono Venete di piedi sei l'una: il piede è d'once 12.

I	Pertiche 173	Piedi 21 . 6	Pertiche 163	Pertiche 10			1° . 13'	19° . 18'	0,50,3,30,2,3,0,4,7,10,1,1,10,1,4,1,7,2,1,2,3,4,2,10,3,5,2,10,4,2,0,5,5,7,1,1,10,0,13,0,14,6,15,3,47,7,19,0,19,6,20,0,21,6	19,6,21,6,20,1,19,6,21,6
II	Pe. 122	Pi. 31 . 7	Pe. 107	Pe. 15	Pertiche 85	Pertiche 88	2° . 44'	18° . 48'	0,2,0,9,1,1,1,4,1,11,3,0,3,0,3,3,3,9,5,7,11,9,15,6,19,6,21,8,23,3,23,6,25,6,25,6,27,3,29,9,31,7	13,9,26,5,31,7
III	Pe. 75	Pi. 26 . 9	Pe. 48	Pe. 27	Pe. 65	Pe. 68	5° . 9'	10° . 20'	0,10,2,0,12,5,21,13,5,0,2,3,24,5,25,4,26,0,26,6,26,9	14,6,21,0,26,4,25,11,26,2,26,9
IV	Pe. 99	Pi. 26 . 7	Pe. 83	Pe. 16	Pe. 110	Pe. 114	3° . 0	15° . 7'	6,10,8,5,10,4,11,4,13,7,16,0,16,7,18,4,18,10,19,9,20,7,20,4,21,2	
V	Pe. 169	Pi. 15 . 7	Pe. 142	Pe. 21	Pe. 175	Pe. 204	1° . 24'	9° . 26'	1,4,3,0,4,0,5,1,5,7,6,4,6,4,6,7,9,0,9,7,11,1,11,4,12,10,13,4,13,0,13,7,13,7,13,11,14,5,14,7,14,7,14,7,15,3,15,1,15,7	2,3,15,1,15,6,15,7

(C) Tronco di Po a Pole e Croce nel Dipart. del Mincio, lungo secondo la riva destra pertiche 527; secondo la riva sinistra pertiche 407. Le pertiche sono Mantovane di braccia 6 l'una; il braccio è di once 12.

I	Braccia 578	B ^a . 35 . o	B ^a . 446	B ^a . 132			4° . 28'	14° . 50'	B ^a . 2,2,10,2,5,3,6,2,6,2,6,3,4,9,2,6,2,6,2,6,5,6,3,16,4,4,4,8, 3,3,5,6,5,10,6,4,6,8,7,6,7,8,6,6,8,8,9,6,10,12,10,13,6,10,6,18,6,22,0, 27,0,32,0,35,0	1,6,1,6,3,6,3,8,3,6,5,6,6,9,6,6,8,6,9,6,10,6,22,0,27,6,32,0,35,0
II	B ^a . 497	B ^a . 27 . o	B ^a . 359	B ^a . 138	Pertiche 76	Pertiche 54	11° . 4'	4° . 18'	2,3,3,2,2,3,3,3,3,3,3,3,6,4,4,4,5,5,6,6,8,0,10,6,12,6,14,0,14, 6,17,6,19,0,19,6,20,0,23,0,22,6,25,0,26,0,27,0,27,0	5,6,8,0,10,6,12,0,17,0,20,0,23,0,25,0,25,6,25,6,27,0
III	B ^a . 478	B ^a . 17 . o	B ^a . 345	B ^a . 133	P ^e . 76	P ^e . 62	7° . 17'	2° . 49'	1,2,1,1,3,2,8,3,3,5,7,7,0,7,6,8,9,9,0,12,0,12,0,13,0,13,6,1, 15,6,15,6,15,6,17,0,17,0,17,0,17,0,16,6,16,6,16,6,17,6,17,0	3,3,13,0,17,0,16,0,16,0,10,0,10,6,17,0,17,0,17,0
IV	B ^a . 530	B ^a . 24 . o	B ^a . 418	B ^a . 112	P ^e . 78	P ^e . 62	13° . 38'	3° . 6'	3,6,6,6,3,6,7,0,7,3,7,8,8,10,9,3,9,9,10,0,10,4,10,6,11,0,11,8,12,0,11, 6,14,6,12,0,0,13,0,13,0,13,0,13,6,13,6,13,6,14,0,14,6,15,0,15, 6,16,0,17,0,18,0,19,0,22,0,24,0	6,1,6,2,4,8,3,6,3,6,14,6,14,6,4,5,6,6,9,0,0,12,6,14,6,19,0,24,0
V	B ^a . 589	B ^a . 20 . o	B ^a . 484	B ^a . 105	P ^e . 79	P ^e . 48	10° . 49'	2° . 22'	2,0,3,6,6,6,6,6,7,0,7,4,7,6,7,9,8,0,8,6,8,6,8,9,9,0,9,6,9,6,10,6,10, 6,10,0,14,6,10,10,10,10,11,0,11,6,12,0,12,6,12,0,13,0,14,3,13,6,15,0, 16,6,17,6,17,6,18,0,18,0,19,0,19,0,19,4,20,0,20,0	1,2,5,9,9,6,10,0,16,6,17,9,18,6,20,0
VI	B ^a . 502	B ^a . 18 . o	B ^a . 400	B ^a . 102	P ^e . 24	P ^e . 26	10° . 0'	2° . 35'	1,6,3,6,5,6,5,8,6,5,4,5,8,7,7,0,7,0,8,0,8,0,8,0,8,6,7,0,9,3,9,8,8,10, 10,0,10,4,11,0,11,6,12,0,13,0,13,0,13,0,14,0,14,6,15,6,17,0,17,6, 18,0	9,0,9,1,10,4,12,0,13,0,13,0,14,6,18,0
VII	B ^a . 569	B ^a . 28 . o	B ^a . 520	B ^a . 49	P ^e . 54	P ^e . 38	29° . 40'	3° . 5'	4,6,1,6,5,0,5,0,5,0,4,5,4,5,6,6,0,6,4,6,7,0,7,3,7,1,7,7,6,8,6,7,0,6, 7,6,8,9,8,8,6,6,9,0,9,9,8,10,0,10,6,11,0,11,6,12,6,12,6,13,6,14,0, 14,0,14,0,15,6,16,0,16,0,18,0,17,6,18,0,20,0,20,0,21,6,27,6,28,0	1,0,1,6,5,0,6,0,2,6,28,6
VIII	B ^a . 471	B ^a . 28 . o	B ^a . 419	B ^a . 52	P ^e . 70	P ^e . 57	28° . 17'	3° . 41'	1,0,6,6,0,9,7,0,7,4,7,4,7,3,7,3,7,6,7,6,7,10,8,4,8,4,8,9,0,9,0,11,6,9, 9,11,0,11,0,11,0,13,6,13,6,14,0,13,6,16,6,17,0,18,0,18,0,21,6,21,3,22, 0,22,6,23,0,23,0,28,0	7,0,7,8,3,2,4,7,6,8,0,20,0
IX	B ^a . 337	B ^a . 26 . 6	B ^a . 302	B ^a . 35	P ^e . 78	P ^e . 78	36° . 36'	3° . 20'	5,6,8,9,8,6,8,6,7,0,9,9,6,10,6,11,0,12,6,12,0,13,0,13,0,14,0,15,0,16,6, 17,0,18,0,19,6,19,6,21,6,25,6,25,6,26,0	1,3,13,6,24,0,25,0,25,6,26,0

SUPPLEMENTO

*Alle osservazioni sopra la teoria della resistenza
de' Fluidi del sig. Giorgio Juan.*

DI GIUSEPPE AVANZINI

ricevuto il dì 15 d'Agosto, 1810

83. **E**lla è opinione di non pochi ragguardevoli Fisici e Matematici che la Teoria della resistenza, e percussione de' fluidi immaginata dal Sig. Giorgio Juan sia meritevole di molta considerazione tanto per le sperienze alle quali venne da esso appoggiata, quanto pei nuovi elementi che v'introdusse. Non si reputerà quindi inutile che alle precedenti (a) io aggiunga poche altre osservazioni valevoli, s'io non m'inganno, a liberare da qualsivoglia dubbio e difficoltà quanto io scrissi contro le une e gli altri.

Delle sperienze

84. Le sperienze consistono, come si disse altrove, in quelle dei Piani esposti all'urto d'acque

(a) Istituto Nazionale. Tom. II; parte I e II.

correnti, della Ruota di Smeaton, dei Cervi volanti, e delle Navi mosse dal vento.

Sperienze dei Piani e della Ruota

85. Sia un piano rettangolare immerso verticalmente, ma solo in parte, e nel senso dei due lati longitudinali, in una corrente d'acqua orizzontale, e di eguale e costante velocità dalla superficie verso il fondo, a la porzione sommersa dei lati medesimi, ossia la distanza del lato inferiore trasversale dal livello dell'acqua, b il lato trasversale, m la gravità specifica dell'acqua. Le sperienze dei piani e della ruota vuolsi che provino: che l'urto esercitato dalla corrente contro il piano debba esprimersi, come vuole

Juan, con la formola $\frac{1}{6} m b a u \sqrt{a}$ (a), e non già

con la $m b a u^2$ comunemente adottata, per la ragione che gli urti sostenuti così dai piani come dalle pale della ruota sono quanto basta conformi agli urti che negli stessi casi ne porgerebbe la formola

$\frac{1}{6} m b a u \sqrt{a}$ e troppo discordi da quelli della for-

mula $m b a u^2$.

In fatti da tali sperienze si raccoglie

1.° che un piano rettangolare di lunghezza quadrupla della larghezza, esposto perpendicolarmente all'azione d'una corrente d'acqua prima col lato

(a) Examen Maritime. Tom. I. § 644

maggior verticale, poi col minore sostenne degli urti in ragione di 2: 1 (*a*), come appunto si ottiene dalla formula $\frac{1}{6} m b a u \sqrt{a}$, quando per la formula $m b a u^2$ la detta ragione sarebbe = 1: 1, cioè del doppio maggiore della vera.

2.° che un piano della forma di un parallelogrammo rettangolo, largo un piede, e immerso d'un piede giusto in una corrente che percorreva due piedi al secondo, incontrò un urto equivalente a $25 \frac{1}{2} \text{ ℥ } (b)$; il quale per la formula $\frac{1}{6} m b a u \sqrt{a}$ esser dovrebbe di $20 \frac{1}{2} \text{ ℥ }$; e per la $m b a u^2$ di 3 ℥ e 14 once solamente.

3.° che il medesimo piano immerso due piedi in altra corrente che percorreva $\frac{4}{3}$ di piede al secondo soffersse un urto di $26 \frac{1}{4} \text{ ℥ } (c)$; e questo pure per la formula $\frac{1}{6} m b a u \sqrt{a}$ dovrebbe essere di $39 \frac{1}{4}$, e per la $m b a u^2$ di $3 \frac{1}{2} \text{ ℥ }$.

4.° finalmente che la velocità permanente della ruota si trovò poco minore, e qualche volta anche eguale della velocità della corrente (*d*), e tale all'incirca è appunto quella che si rinviene calcolando l'urto dell'acqua nelle pale colla formula $\frac{1}{6} m b a u \sqrt{a}$,

(*a*) Ibidem. Prefazione; pag. 13.

(*b*) Ibidem. § 644; pag. 266.

(*c*) Ibidem. § 644; pag. 266.

(*d*) Appendice seconda; pag. 395.

quando per la $m b a u^2$ la detta velocità esser dovrebbe all' incirca un terzo della velocità della corrente.

86. Osservazione I.^a L'esperienze dei Piani e della Ruota se pure concordassero con la formula

$\frac{1}{6} m b a u \sqrt{a}$ quanto discordano con la formula

$m b a u^2$, non potrebbero decidere nè in favore di quella nè contro questa.

Il Juan in ciascuna delle correnti che servirono alle sopraccennate sperienze, suppose, come dovea (§ 85) la velocità eguale in tutti gli strati, dimodochè per la velocità, che egli chiamò della Corrente, non devesi intendere se non la velocità dei loro strati superficiali.

Pongasi ora che, in luogo di essere in tutti eguale, crescesse dalla superficie verso il fondo così, che 1.^o la velocità media degli strati urtanti il piano avente il lato maggior verticale fosse alla velocità media degli strati urtanti il piano avente il lato minor verticale $:: \sqrt{2} : \sqrt{1}$. 2.^o che la velocità media degli strati che colpivano il piano immerso un piede, fosse di 5 piedi al secondo. 3.^o di $3 \frac{2}{3}$ piedi al secondo la velocità media degli strati che percuotevano il piano immerso due piedi. 4.^o finalmente $\frac{3}{2}$ della velocità superficiale la velocità media dell'acqua urtante le pale della Ruota. Calcolati gli urti relativamente a ciascuna delle quattro sperienze, assumendo per le velocità delle correnti, non già, come fece Juan, la velocità superficiale, ma le medie sopra in-

dicare, si troverà che la formula $\frac{1}{6} m b a u \sqrt{a}$ non somministra più valori conformi ai veri, ma li porge in vece, e precisamente eguali ai veri la formula $m b a u^2$.

Da nessuno poi si vorrà dubitare che le velocità delle suddette correnti non potessero crescere, e nelle supposte ragioni. Imperciocchè per assicurarci che doveano essere eguali, sebbene di tale eguaglianza il Juan non ci abbia recata prova alcuna, nè fatto alcun cenno delle qualità e circostanze locali di quelle correnti, bisognerebbe che fosse dimostrato che tali esser dovessero in ogni corrente, e in qualunque tratto di essa, e in qual si sia circostanza. Ora egli è ben vero che in alcune non variano, almeno sensibilmente, le velocità degli strati; ma egli è poi egualmente certo che in altre, e di non picciol numero, le velocità crescono quali in una ragione, quali in un'altra, dal pelo delle correnti fino al fondo, o almeno fino ad una certa distanza dal fondo. (a)

(a) Veggansi le Sperienze fatte col Pendolo in 17 perpendicolari sul Po dal Zendrini. Leggi e fenomeni delle acque correnti.

Dal Lecchi col quadrante in 9 perpendicolari sul fiume Chiese. Suo Trattato d'Idrostatica.

Dal Sig. Lorgna col pendolo a quadrante in dieci perpendicolari nei Canali del Veronese. Sua Dissertazione sulla distribuzione delle velocità nelle Sezioni dei Fiumi, 1771.

Dal Sig. Michelotti col quadrante e col Tubo di Pitot. Sue Sperienze Idrauliche.

Dal Saladini coi corpiccinoli natanti. Sua lettera Idrostatica al Cittadino Giusti. Bologna; s. Tommaso d'Aquino. Anno 9.

E finalmente l'esperienze della Fisica Idrometrica.

T. II. P. II.

87. Osservazione 2.^a L'esperienze dei piani e della ruota instituite in modo da potere definitivamente decidere dell'una o dell'altra formola, deciderebbero per la $m b a u^2$, e contro la $m b a u \sqrt{a}$. Dal § precedente risulta che ad ottenere che l'esperienze dei cervi e della ruota avessero a decidere veramente la questione, bisognerebbe che fossero fatte in correnti di costante velocità dalla loro superficie al fondo. Ora vedremo che instituite in tal modo deciderebbero in favore della formola $m b a u^2$.

Il Mariotte (a) espone perpendicolarmente alla corrente della Senna una tavola di un mezzo piede quadrato, e con una corrente che avea la velocità di tre piedi e mezzo per secondo. La tavola sostenne un urto equivalente a $3 \frac{3}{4} \text{ ℥}$ il quale non differisce dalla formola $m b a u^2$ se non di $6 \frac{1}{2}$ oncie in meno, e secondo la formola $\frac{1}{6} m b a u \sqrt{a}$ l'urto avrebbe dovuto essere di 8 ℥ in circa.

In una seconda sperienza egli assicura, che la tavola sostenne un peso di 9 oncie, la velocità della Corrente essendo di $1 \frac{1}{4}$ piede per secondo. Il quale per la formola $m b a u^2$ avrebbe dovuto essere di 8 oncie, (di un' oncia solamente minore del vero) e per quella di Juan di 104 oncie.

In queste sperienze essendo picciolo il piano e perciò piccolo lo sprofondamento, e il lato superiore presso che a fior d'acqua, nessuno potrà dubitare

(a) Discours troisieme. Traité du mouvement des eaux.

che la velocità di tutti gli strati acquei urtanti il piano non si potessero supporre eguali alla velocità dello strato superiore, e perciò necessariamente eguali tra loro.

Ma vogliasi pur procedere con tutto il rigore richiesto dall'importanza della questione, e quindi non si adottino, per ciò che riguarda l'eguaglianza delle velocità, come abbastanza sicure le sperienze del Mariotte.

Non si porrà certamente in dubbio che non sieno esatte per ogni rapporto quelle del Cav. Borda (a), e le numerosissime e istituite più in grande dei tre grandi Geometri Dalember, Condorcet, e Bossut (b); e che da queste non risulti che le resistenze dirette incontrate da piani e da parallelepipedi rettangoli e immersi in parte nell'acqua tranquilla corrispondano benissimo alla formula $m b a u^2$. Se dunque, come ne convengono tutti gl'Idraulici e con essi lo stesso Juan (c), è la stessa cosa che una corrente d'acqua orizzontale e di costante velocità dalla superficie al fondo urti un piano immobile, o che il piano si muova orizzontalmente e con la velocità della corrente per l'acqua tranquilla, chi non dovrà persuadersi che anche le sperienze dei piani e della ruota come quelle dei Geometri francesi non dovessero conformarsi colla teoria del Newton qualora fossero istituite come vorrebbero essere, o come lo sup-

(a) Mémoires de l'Académie Royale des Sciences; années 1763, 1767

(b) Nouvelles expériences sur la résistance des fluides, 1777; e Hydrodynamique de Bossut.

(c) Examen maritime. Tom. I. § 590

pone il Juan in correnti animate ad ogni altezza da eguali velocità?

Sperienze dei Cervi

88. Nel caso che il piano (§ 85) sia tutto immerso, e che il lato longitudinale possa considerarsi picciolissimo in confronto della distanza del trasversale superiore dal pelo della corrente, chiamata A questa distanza, a il lato longitudinale, secondo Juan l'urto diretto che sosterrà il piano sarà espresso da

$\frac{1}{3} m b a u \sqrt{A}$, e non da $m b a u^2$, e l'obbliguo dal prodotto del diretto $\frac{1}{3} m b a u \sqrt{A}$ nel semplice se-

no dell'angolo ϕ d'incidenza, e non dal prodotto del diretto $m b a u^2$ nel quadrato del seno medesimo (a). L'esperienze dei Cervi si vuole che comprovino ambedue le formule del Juan, e contradicano tutte due quelle del Newton, perchè i fenomeni che offrono i Cervi esponendoli all'urto del vento corri-

spondono alla formula $\frac{1}{3} m b a u \sqrt{A} \cdot \sin \phi$, e discor-

dano dalla Newtoniana $m b a u^2 \sin^2 \phi$. In fatti si osserva che per esempio ad innalzare un cervo e a sostenerlo in una linea parallela all'orizzonte basta un vento di piccola velocità; e calcolato l'urto del ven-

to con la formula $\frac{1}{3} m b a u \sqrt{A} \sin \phi$ trovasi che la velocità del vento per produrre l'effetto osservato dovrebbe essere di 11 linee in circa al secondo, quando per la formula ordinaria esser dovrebbe di $12 \frac{1}{2}$ piedi al secondo; velocità che spingerebbe il cervo nella linea verticale, e lo straccierebbe (a).

89. Osservazione 3^a. L'esperienza dei Cervi, concordando con la formula $\frac{1}{3} m b a u \sqrt{A} \sin \phi$, e non con la $m b a u^2 \sin^2 \phi$, potrebbe tutto al più dimostrare che l'urto obliquuo non sia proporzionale al quadrato del seno dell'angolo d'incidenza, ma non già che il diretto non abbia ad esprimersi con la formula $m b a u^2$ comunemente ricevuta.

Calcolando l'urto del vento con la formula $m b a u^2 \sin^2 \phi$ trovasi $3 \frac{4}{10}$ linee per la velocità necessaria ad innalzare il cervo in una linea orizzontale. Ora se con la formula $m b a u^2 \sin^2 \phi$ si ottengono $12 \frac{1}{2}$ piedi, e con la $m b a u^2 \sin^2 \phi$, $3 \frac{4}{10}$ linee, è manifesto che vi sarà necessariamente una potenza del seno tra la seconda, e la prima, per esempio n , per cui la formula $m b a u^2 \sin^n \phi$ ci porgerebbe pel valore della velocità del vento, appunto come fa la formula di Juan, $11 \frac{1}{2}$ lin. Ciò posto, se l'esperienza dei cervi concordando con $\frac{1}{3} m b a u \sqrt{A} \sin \phi$ si vuo-

(a) Opera citata. Tom. I. Appendice I. §§ 51, 90.

le che dimostri che l'urto diretto debba esprimersi con $\frac{1}{3} m b a u \sqrt{A}$, e l'obliquio con $\frac{1}{3} m b a u \sqrt{A} \sin. \phi$

è manifesto che l'esperienza stessa potendo concordare egualmente bene anche con la formula $m b a u^2 \sin^n \phi$ potrebb' anche egualmente ben dimostrare che l'urto diretto dovesse esprimersi con $m b a u^2$, e l'obliquio con $m b a u^2 \sin^n \phi$.

90. Osservazione 4^a. L'esperienza dei Cervi istituita in modo da dover decidere veramente per l'una o per l'altra formula dell'urto diretto, deciderebbe in favore della formula $m b a u^2$, e contro la $m b a u \sqrt{A}$.

Dalla precedente Osservazione chiaramente apparisce che l'esperienza dei Cervi potrebbe decidere tra le due suddette formule allora solamente che con essa si determinasse l'urto diretto del vento e non l'obliquio. Ora vedremo che in tal modo deciderebbe per la $m b a u^2$.

Gli sperimenti del sig. Ab. Ximenes (a) fatti con quella sua ventola rettangolare immersa tutta e profondamente nelle acque del fiume Arno e del Canale di Castiglione concordano tutti, quanto basta, con la formula $m b a u^2$.

Ma neppure queste sperienze come quelle del Mariotte vogliansi considerare bastantemente sicure sì per riguardo alla richiesta eguaglianza delle velocità degli strati, come per l'altezza a cui la ventola era immersa. Abbiamo veduto che, sia che un piano ret-

(a) Nuove Sperienze idrauliche. Siena. 1780

tangolare si esponga all'urto d'una corrente orizzontale, o che si muova orizzontalmente e con eguale velocità pel fluido tranquillo, è la stessa cosa. Ora dall'esatte sperienze del Cav. Borda (a) risulta che le resistenze dirette incontrate da tre piani della grandezza di 3 . 6 . 9 pollici quadrati mossi orizzontalmente e con differenti velocità per l'aria tranquilla possono riguardarsi come esattamente proporzionali ad $m b a u^2$, quand'esse velocità non fossero nè molto grandi, nè troppo piccole; come appunto conviene che sia perchè possa suppersi l'aria un fluido incompressibile.

Se ad alcuno facesse difficoltà l'aver il Borda fatt'uso ne' suoi sperimenti di piani troppo piccioli, farò osservare ch'io ottenni gli stessi risultati facendo muovere per l'aria tranquilla, ma con diverso artificio, direttamente dei piani della grandezza dall'uno fino ai sette piedi quadrati, che è appunto la grandezza dei Cervi.

Non si potrà dunque dubitare che per la stessa ragione anche i Cervi esposti all'urto diretto del vento, o mossi direttamente per l'aria tranquilla, non avessero a porgere valori conformi alla formola $m b a u^2$.

Sperienze delle Navi

91. Supposto un piano picciolissimo rettangolare

(a) Mémoires de l'Académie Royale des Sciences: année 1763

che si muova per un fluido incompressibile tutto, e ad una qualunque profondità immerso, e supposta db la larghezza, d l'altezza del piano, ϵ la distanza della superficie del fluido dal lato orizzontal superiore del piano medesimo, u la velocità; secondo Juan la resistenza diretta dovrebbe esprimersi con

$\frac{1}{3} m db . d \epsilon . u \sqrt{\epsilon}$, e non già con $m b a u^2$ (a), e la

obliqua dal prodotto della diretta $\frac{1}{3} m db . d \epsilon u . \sqrt{\epsilon}$

nel semplice seno dell'angolo ϕ d'incidenza, e non dal prodotto della diretta $m b a u^2$ nel quadrato del medesimo seno.

L'esperienze delle navi vuolsi che comprovino ambedue le formole del Juan, e mostrino l'insussistenza delle ordinarie, perchè i fenomeni che ci offrono le navi mosse dal vento corrispondono alla formola

$\frac{1}{3} m db . d \epsilon u \sqrt{\epsilon} \sin \phi$, e discordano da $m b a u^2 \sin^2 \phi$.

Si osserva per esempio che per far percorrere ad una nave di linea, spirando il vento in poppa, $7 \frac{1}{2}$ miglia all'ora sarebbe mestieri che il vento percorresse 25 piedi in circa al secondo (b). E calcolato tanto l'urto del vento contro le vele quanto la resistenza dell'acqua contro la prora con la formola

$\frac{1}{3} m db . d \epsilon u \sqrt{\epsilon} \sin \phi$ si trova per la velocità del ven-

(a) Examen maritime. Tom. II. § 339

(b) Ibidem. §§ 351, 352.

to appunto 25 piedi in circa, quando col calcolo della $m d b . d \epsilon . u^2 \sin^2 \phi$ si ottengono, per la velocità del vento, 110 piedi al secondo.

92. Osservazione 5^a. Con ragionamento simile a quello della Osservazione terza si comprenderà facilmente che anche l'esperienza delle navi potrebbe dimostrare tutto al più, che la percossa, e la resistenza obliqua non sia proporzionale al quadrato del seno, ma non già che la percossa o resistenza diretta non s'abbia da esprimere con l'ordinaria formula $m d b . d \epsilon u^2$, piuttosto che con la Juaniana $m d b . d \epsilon . u \sqrt{\epsilon}$.

Calcolato così l'urto del vento come la resistenza dell'acqua con la formula $m d b d \epsilon u^2 \sin^2 \phi$ trovasi che per far percorrere alla Nave $7 \frac{1}{5}$ miglia all'ora abbisognerebbe al vento una velocità di 17 piedi in circa al secondo. Ora se con la formula $m d b . d \epsilon u^2 \sin^2 \phi$ si ottengono per la velocità del vento 110 piedi, e con la $m d b . d \epsilon . u^2 \sin^2 \phi$ 17 in circa, vi sarà necessariamente una potenza per esempio n del seno tra la seconda e la prima per cui la formula $m d b . d \epsilon u^2 \sin^2 \phi$ ci porgerebbe pel valore della velocità del vento, appunto come fa la formula di Juan, 25 piedi al secondo. Ciò posto se l'esperienza delle navi concor-

dando con $\frac{1}{3} m d b . d \epsilon u . \sqrt{\epsilon} \sin \phi$ si vuole che dimostri che l'urto diretto debba esprimersi con

$\frac{1}{3} m d b . d \epsilon u \sqrt{\epsilon}$, e l'obliqua con $\frac{1}{3} m d b . d \epsilon . u \sqrt{\epsilon} \sin \phi$

è manifesto che la sperienza stessa potendo corrispondere egualmente bene anche alla formula

T. II. P. II.

$m \, d b \cdot d \varepsilon u^2 \sin^n \phi$, potrebbe anche egualmente ben dimostrare, che l'urto e la resistenza diretta si avesse ad esprimere con $m \, d b \cdot d \varepsilon \cdot u^2$, e l'obliqua con $m \, d b \cdot d \varepsilon u^2 \sin^n \phi$.

93. Osservazione 6^a. Anche l'esperienza delle navi fatta in maniera da dover decidere definitivamente per l'una o per l'altra formula dell'urto e resistenza diretta, deciderebbe in favore della formula

$m \, d b \cdot d \varepsilon u^2$, e contro la formula $\frac{1}{3} m \, d b \cdot d \varepsilon \cdot u \sqrt{\varepsilon}$.

Da ciò che si disse nella precedente osservazione rendesi chiaro che l'esperienza delle navi potrebbe decidere delle suddette formule allora solamente che con essa si potesse determinare l'urto o la resistenza diretta di un picciolissimo piano. Ora si vedrà che istituita in tal modo comproverebbe pienamente la verità della formula ordinaria $m \, d b \cdot d \varepsilon u^2$.

La formula $m \, b \, a \, u \sqrt{A}$ (§ 88) fondasi sopra l'ipotesi che A sia talmente grande rispetto ad a da potersi supporre la distanza di ogni punto dell'area ba dal livello del fluido eguale ad A . In oltre una tal condizione si verifica appunto nelle formule $m \, d b \cdot d \varepsilon u \sqrt{\varepsilon}$, $m \, d b \cdot d \varepsilon u^2$, imperciocchè essendo $d b \cdot d \varepsilon$ un'area infinitamente picciola, ed ε quantità finita, la distanza del livello del fluido da ogni punto dell'area $d b \cdot d \varepsilon$ potrà supponersi eguale ad ε . Dunque tra le due formule $m \, b \, a \, u \sqrt{A}$, $m \, b \, a \, u^2$, e le $m \, d b \cdot d \varepsilon u \sqrt{\varepsilon}$, $m \, d b \cdot d \varepsilon \cdot u^2$ non si potrà considerare altro divario se non che nelle prime l'area urtante o urtata è finita, e nelle altre picciolis-

sima. Ora se l'esperienze che porgono l'urto, o la resistenza diretta d'un piano finito sono (§ 90) conformi alla formula $m b a u^2$, e discordi dalla $m b a u \sqrt{A}$, perchè del pari anche l'esperienze delle navi, qualora porgessero l'urto e la resistenza diretta d'un picciolo piauo, non dovrebbero concordare con la formula $m d b . d \epsilon . u^2$ e dissentire dalla $\frac{1}{3} m d b . d \epsilon . u \sqrt{\epsilon}$?

Conclusione.

94. Da queste osservazioni parmi che si possa giustamente concludere, che l'esperienze del Juan ben lontane dal poter confermar pienamente, come si crede, le sue formule dell'urto o resistenza diretta, dovrebbero per l'opposto mostrarle difettose e fallaci, e diventare una nuova prova della giustezza e verità delle comunemente ricevute. Lo stesso vorrebbe pur conchiudere anche relativamente alle formule che secondo Juan dovrebbero esprimere la resistenza o l'urto per qualunque altro caso. Imperciocchè queste sono una necessaria conseguenza di quelle, dimodochè non potrebbero le une esser vere, se non lo fossero anche le altre.

Degli Elementi.

95. Dalle formule $m b a u \sqrt{a}$, $m b a u \sqrt{A}$, $m d b . d \epsilon \sqrt{\epsilon} . u$ (§§ 36, 38, 91) del Juan, e dalle $m b a u^2$, $m d b . d \epsilon u^2$ del Newton relative ai tre casi, ai quali, come si è veduto, sono dirette le spe-

rienze del Juan, chiaramente si scorge che gli Elementi da esso introdotti nel 1.º caso si restringono alla sola radice della porzione immersa del lato verticale del piano; nel 2.º. alla radice della distanza del livello del fluido dal lato orizzontale superiore del piano; nel 3.º. alla radice della distanza del livello del fluido dal picciolissimo piano $db . d\epsilon$.

Ora non potendosi per le cose fuor dimostrate dubitare che non sieno false le formule del Juan, e vere le Newtoniane, ne segue di conseguenza, che nelle formule della resistenza o non debbono computarsi in nessun modo gli elementi introdottivi dal Juan, o lo debbono essere in una maniera molto diversa.

Nulladimeno trattandosi di un argomento di tanta importanza reputo necessario il far rimarcare che ciò viene anche dimostrato direttamente ed a priori, e coi principj di una sicura teoria, e con esperienze le più decisive.

A tal fine si osserverà attentamente; 1.º. che la formula $m b a u \sqrt{a}$ è dedotta immediatamente da quest' altra $m d b d \epsilon u \sqrt{\epsilon}$, supposto $db . d\epsilon$ un differenzio-differenziale dell' area urtata, o urtante, ϵ la distanza di essa $db . d\epsilon$ dalla superficie di livello del fluido; 2.º. che essendo la formula $m d b d \epsilon . u \sqrt{\epsilon}$ simile alla formula $m b a \sqrt{A} . u$ (§ 93) del secondo si dovranno riguardare tutte e tre per simili interamente; 3.º. che ciascuna di esse è simile a quella che secondo i principj di Juan dovrebbe esprimere la resistenza diretta di un piano orizzontale che si muova verticalmente, e sommerso nell' acqua tranquilla a tale profondità, che il moto da esso piano eccitato

nel fluido non giunga alla superficie di livello. Imperciocchè chiamata $b'a'$ l'area di questo piano, A' la distanza di esso dal livello del fluido, u la velocità, la resistenza da esso incontrata sarebbe $m b'a' u \sqrt{A'}$.

Da queste verità sulle quali non potrà certo cader dubbio alcuno, segue di legittima e necessaria conseguenza che per dimostrare completamente il mio assunto basterà ch'io dimostri che nella espressione della resistenza incontrata dal piano orizzontale moventesi nel modo accennato non entra funzione alcuna dell'altezza, il che viene, s'io non m'inganno, rigorosamente dimostrato dalla mia teoria esposta ai §§ 30 fino al 37 inclusive, e dalle sperienze da me instituite, e descritte coi necessarj dettagli ai §§ 28, 29.

96. La formula $\frac{1}{6} m b a u \sqrt{a}$ finora esaminata

spetta al caso che il piano si muova con picciola velocità. In quella con la quale il Juan esprime la resistenza del piano moventesi con grande velocità entrano due elementi; l'altezza a cui il fluido s'innalza davanti e si abbassa dietro del piano, e la radice dell'immersione.

Riguardo al 1°. non porrò già in dubbio che non si debba computare. Farò soltanto riflettere non potersi asserire, come si fa da taluno, che siesi omnesso dal Newton. La teoria di questo grand' uomo spetta soltanto al caso che il solido sia talmente immerso nel fluido incompressibile, o si muova con tale velocità che il moto da esso eccitato nel fluido non giunga fino alla superficie, o in una parola, che dietro il

solido non nasca vacuo; nel caso che il solido sia galleggiante egli avverte espressamente (a) che il fluido s'innalza davanti, e si abbassa di dietro, e perciò si dovrà alquanto aumentare la resistenza. 2°. non esser vero, come lo pretende Juan, e come sembra crederlo alcuni Geometri, che pei principj stessi della teoria di Juan il fluido debba innalzarsi e deprimersi, nè che debba innalzarsi, e deprimersi ugualmente, e di quella quantità ch'egli determina. (b)

Riguardo poi al secondo elemento, cioè alla radice dello sprofondamento si osserverà 1°. che essendosi dimostrato che qualora il moto eccitato dal solido nel fluido non giunge fino alla superficie di livello, nella formula della resistenza non entra funzione alcuna dell'altezza a cui è immerso, ne viene di conseguenza che se entrerà l'altezza dello sprofondamento quando il moto del fluido giungerà alla superficie di livello, che è il caso di cui ora si parla, essa altezza non potrà essere se non una funzione di quella a cui il fluido medesimo s'innalza davanti, e si deprime di dietro, e la formula della resistenza incontrata dalla porzione immersa dell'area urtante dovrà essere composta di due termini, de' quali il primo dovrà esprimere la resistenza che incontrerebbe l'area stessa, se il moto del fluido non giungesse alla superficie, e perciò in esso termine non entrerà

(a) Philosophiæ naturalis principia mathematica. Scolio al Lemma 7 della Prop. 37 del Lib. 2.^o Amstelodami; 1723.

(b) Osservazioni e sperienze sopra la Teoria della resistenza de' fluidi; del sig. Juan: § 50.

funzione alcuna dello sprofondamento; il secondo sarà una funzione dell'area, o dimensioni dell'area, e dell'altezza a cui il fluido s'innalza. Imperciocchè in questo caso solo sarebbe soddisfatta la condizione, che fatta zero la suddetta altezza, ciò che rimane non contenga funzione alcuna dell'altezza medesima; si potrà quindi conchiudere fondatamente, che nè pure il secondo elemento potrà computarsi, o si dovrà computare in un modo diverso da quello che vuole il Juan.

Con un discorso simile si dimostra la stessa cosa anche per ciò che spetta agli elementi calcolati dal Juan nelle formule che risguardano gli altri casi.

Conclusione.

97. Da questi brevi cenni parmi che si possa con molto fondamento raccogliere, che anche i nuovi elementi messi a calcolo dal Juan, ben lontani dal potersi ammettere, come si avvisa, per giustamente ed utilmente calcolati, debbansi per lo contrario considerare per una delle cause principali che rendono falsa e pericolosa la sua teoria, se pure a rigore può dirsi sua. (a)

(a) Considerando attentamente tutta intera la Teoria del Juan si comprenderà ad evidenza non essere che uno sviluppo ed applicazione di una formola, che 26 anni prima pubblicò l'Eulero come bisognosa dell'appoggio dell'esperienza: veggansi i *nouveaux principes d'Artillerie de M. Benjainin Robins commentés par M. Léonard Euler, et traduits de l'allemand par M. Lombard.* à Dijon. 1733. pag. 320.

SULLE LIVELLAZIONI BAROMETRICHE

DI FRANCESCO VENINI

Altra Continuazione della parte II.

ricevuta il di 23 d'Agosto, 1810

SEZION II.

Delle regole date da alcuni fisici per le livellazioni barometriche.

ARTICOLO I.

Regola del sig. De Luc.

66. Il celebre de Luc, avendo attentamente esaminati i metodi dei Fisici, che lo precedettero, trovò in essi tre principali sorgenti di errori. La prima è l'imperfezion dei barometri; che quasi nessuno aveva purgati scacciandone l'aria coll'ebollizione: la seconda l'incertezza della vera lunghezza della colonna mercuriale; che niuno aveva ancor immaginato di ridurre ad una temperatura o costante o uguale nei due barometri inferiore e superiore: la terza finalmente nell'uso generale de' suoi predecessori d'applicare senza correzion veruna le regole loro a qualunque temperatura dell'aria, come se questa non si condensasse pel freddo, e pel calore non si dilatasse. Al che si deve aggiugnere, che nessun dei barometri

T. II. P. II. 43

fino a' suoi di conosciuti poteva con sicurezza trasportarsi a distanze considerabili, o almeno senza pericolo d'alterazione.

La prima cura dell' accurato fisico di Ginevra quella fu dunque di costruire un buon barometro portatile; di cui egli dà un' ampia e minuta descrizione nella sua grand' opera delle modificazioni dell' atmosfera al capo I^o. della terza parte. La scala del suo barometro è divisa in pollici ed in linee con rette di color nero; e ciascuna linea è sottodivisa in quattro con rette di color rosso. Egli lascia poi, che l'osservatore sottodivida ad occhio ciascun quarto di linea in altre quattro parti; onde possa aver l'altezza apparente del barometro in sedicesimi di linea. A corregger gli effetti del calore sulla lunghezza della colonna mercuriale sostenuta dalla pression dell' aria è destinato un termometro incastrato nel corpo del barometro stesso verso la sua metà. Questo termometro è di mercurio come quello di Farheneit, ma con una scala diversa. Il De Luc graduava i suoi termometri sotto una pressione atmosferica di 27 pollici ponendo lo zero al ghiaccio in fusione, ed il grado 80 all' acqua bollente. Con questi termometri egli trovò, come ho già detto al num. 9; che la colonna di 27 pollici si dilata di sei linee passando dalla temperatura zero a quella di 80 gradi. La dilatazion del mercurio, da lui supposta uniforme, è dunque di $\frac{6}{80}$ di linea per ogni grado: ma troppo incomodo sarebbe l' uso di questa frazione nel ridurre le altezze barometriche ad una temperatura costante. Quest' inconveniente determinò l' autore a divider l' intervallo po.

sto fra il ghiaccio e l'acqua bollente non in 80 ma in 96 gradi; per ognun de' quali la dilatazione veniva ad essere di $\frac{6}{96}$ o di $\frac{1}{16}$ di linea, cioè della quantità stessa, in cui è divisa la scala del suo barometro. Il grado dodicesimo di questa divisione fu scelto dall'autore per temperatura costante: egli pose a questo lo zero d'una nuova scala; nella quale la temperatura dell'acqua bollente fu ad 84 gradi, e quella del ghiaccio in fusione a -12 .

„ Il mio scopo principale in quest' opera, di-
 „ ce il sig. De Luc, è quello di paragonare delle
 „ altezze note cogli abbassamenti del mercurio nel
 „ barometro osservati a queste medesime altezze, af-
 „ fin di trarne una regola generale, per mezzo di cui
 „ si possano in avvenire misurar le altezze accessibi-
 „ li, e dappertutto e in ogni tempo conoscere la den-
 „ sità ed il peso assoluto dell'aria. Ho esposte fin qui
 „ tutte le precauzioni, che ho prese per non esser in-
 „ gannato dal barometro: trattasi ora di quelle, che
 „ ho impiegate nel misurar le altezze dei luoghi, ove
 „ ho fatte le mie sperienze.

Egli misurò dunque sul ghiaccio d'un fosso una base di tese 566 e $\frac{2}{3}$, e servendosi d'un buon quadrante di 3 piedi di raggio, trovò la distanza d'una delle estremità della base dalla cima del monte *Salève* di te. 4727, 5. Dice, che il risultato della misura geometrica, non computata nè la curvatura della Terra nè la rifrazione, fu di 486 tese.

Ora applicando questi dati al triangolo ABF (fig. I°) ne ho $AB = 4727, 5$; e $BF = 486$. Ciò posto chiamo γ l'angolo apparente d'altezza EAB ;

e ne formo l'equazione $(4727,5) \operatorname{sen.} y = 486$; e da questa traggo $y = 5^{\circ} 54' 2'', 12$. Questo fu dunque il valore dell'angolo apparente d'altezza osservato dal sig. De Luc. Io lo suppongo esatto; e cerco per mezzo suo il valore dell'angolo al centro ω . Nel triangolo CAB abbiain l'angolo $CAB = 95^{\circ} 54' 2'', 12$; e per con-

seguente $\frac{B+C}{2} = 42^{\circ} 2' 53'', 94$. La base, come dice

l'autore al paragrafo 648 delle sue Ricerche, fu superior al mare di te. 211, 67; e queste aggiunte al raggio osculatore della latitudine di Ginevra danno il valor di CA . Ora la latitudine di Ginevra è $46^{\circ} 12' 17''$; e supera di soli 19 secondi la latitudin media del grand'arco misurato in Francia dai signori Méchain e De Lambre. La lunghezza del grado a questa latitudine si è trovata di tese 57018, 4; cui corrisponde il raggio osculatore 3266914, 29. E' dunque $CA = 3267126$; e per conseguente $CA - AB = 3262398, 5$; e $CA + AB = 3271853, 5$. Fatto con

questi dati il solito calcolo trovasi $\frac{B-C}{2} = 41^{\circ} 58' 2'',$

18; e quindi $C = \omega = 0^{\circ} 4' 56'', 76$.

Cerco ora l'effetto della rifrazione; ed osservo, che fra i valori di $\frac{m}{n}$ posti nella tavola III^a del num. 58

niuno ve n'ha per la Svizzera; ma che ci sono quei dell'Italia e della Francia, tra le quali essa è situata. Io prenderò dunque il lor medio cioè 0,081181; e

l'applicherò a Ginevra. Avendo il De Luc misurata la base sul ghiaccio, si può credere, che anche l'angolo d'elevazione sia stato da lui misurato in tempo che l'aria era alla temperatura del ghiaccio. Io non so quale sia stata l'altezza del barometro nel tempo dell'osservazione, e non potendo far meglio, la supporrò di 27 pollici altezza media per Ginevra. Nelle circostanze della misura dell'angolo d'elevazione sa-

rà dunque stato $\frac{m}{n} = 27 \frac{(0,081181)}{28} = 0,073282$, e

per conseguente $\frac{mC}{n} = 296'',76 (0,073282) = 23'',23$.

Con questo valore della rifrazione si faccia il calcolo dell'altezza vera, e troverassi $Bd = 488,94$ te. $= 2933$ pie. e $\frac{64}{100}$. L'altezza medesima misurata dal sig. De Luc colla livellazione fu di piedi $2926 \frac{2}{3}$, cioè minore di 7 piedi. Questa differenza può nascere dall'errore d'un mezzo minuto nell'angolo dell'altezza apparente, se si suppone d'un'estrema esattezza il risultato della livellazione. Che se questo fosse di qualche piede minor del vero, l'error dell'angolo si ridurrebbe a pochi secondi.

Ma lo stesso non può dirsi dell'altra misura geometrica, di cui parla l'autore. In questa per la distanza di tese $2026 \frac{1}{3}$ egli ebbe un risultato di $432,5$ d'altezza, non computata la curvatura e la rifrazione: onde segne, che il suo angolo d'elevazione apparente fu $= 12^\circ 19' 33'',09$. Fatto il calcolo con questi valori di EAB e di AB trovo l'angolo al centro $= 2' 4'',67$. Calcolata poi la rifrazione col valore di

$\frac{m}{n}$ posto qui sopra, ella risulta $= 9''$, 76; e quindi l'altezza vera insensibilmente diversa dall'apparente è di tese 433 o di piedi 2598. La livellazione ne diè soltanto 2584; onde la differenza fu di piedi 14. Affinchè la misura geometrica fosse d'accordo colla livellazione, l'angolo dell'altezza apparente dovrebb'essere $= 12^\circ 15' 40''$ in luogo di $12^\circ 19' 33''$, 09, cioè minore di $3' 53''$. Il De Luc, non avendo alcun dubbio intorno all'esattezza dell'angolo osservato, attribuisce l'eccesso della misura geometrica alla rifrazion sola. Ma, se ciò fosse, la rifrazione avrebbe dovuto accrescer l'angolo dell'altezza vera di 233 secondi, cioè quasi del doppio dell'angolo al centro, che fu di $124''$, 67. Tanta rifrazione, essendo assolutamente contraria a tutte le osservazioni, io credo, che l'errore stia pressochè interamente nella misura dell'angolo d'elevazione.

La diversità de' risultati delle misure geometriche e delle livellazioni determinò il sig. De Luc a rinnovare quest'ultime. „ Noi trovammo, dic'egli, alcune „ differenze (*tra le due livellazioni*) nelle stazioni in- „ termedie, il che solo bastava a render utile la se- „ conda operazione. Ma ne fummo più largamente „ ricompensati quando trovammo nella somma totale „ la sola differenza di dieci pollici e mezzo. Tutte le „ altezze, alle quali io ho osservato il barometro pos- „ son dunque considerarsi come determinate con tut- „ ta la possibil precisione.

Se la precisione nella misura di queste altezze sia tale quale il sig. De Luc la suppone è cosa incerta ancora; ed io avrò altrove occasion di parlar-

ne. Per ora le supporrò esatte; ed aggiungerò, che negli anni 1755, 56, 58, 59, e 60 l'instancabile fisico di Ginevra fece in 15 stazioni del monte Saleve un numero grandissimo d'osservazioni. In ognuna di queste egli notò l'altezza apparente del barometro, i gradi del termometro attaccato per farne la correzione, e quelli del termometro distaccato *esposto al Sole*, dic'egli, *quanto più alto fu possibile*; il che parmi voglia dire a circa cinque piedi d'altezza. Mentr'egli osservava sul monte, suo padre faceva ad ogni quarto d'ora le osservazioni corrispondenti nel pian terreno d'una casa distante tre quarti di lega ad un di presso dalla prima stazione. Il termometro destinato ad indicare il calor dell'aria era sospeso fuor della casa sopra una piccola eminenza.

67. Prima di proceder più oltre stimo opportuno di riferire ciò che il Cav. Shuckburg ha osservato intorno all'altezza diversa dei termometri o esposti al Sole o tenuti all'ombra, e di rapportare altresì la serie delle belle osservazioni fatte dal sig. Pictet sulla corrispondenza di due termometri a diverse ore del giorno; de' quali uno era posto alla distanza di cinque piedi, e l'altro a quella di 75 da terra.

Il primo in una nota della pag. 526 del volume LXVII parte II^a delle Transazioni filosofiche si esprime a questo modo. „ Io ho preferito di sospendere i „ termometri all'ombra; e ne adduco la seguente „ ragione. Ogni riflessione di calor locale e spurio „ schivasi più facilmente: niun concentrato e falso calore è acquistato dall'incastatura del termometro, „ e quindi comunicato al tubo anche quando la pal-

„ la è isolata: e finalmente perchè io sospetto, che la
„ real temperatura dell'atmosfera al Sole ed all'om-
„ bra sia la stessa o almeno insensibilmente diversa.
„ La mia proposizione può sembrare esagerata; ma
„ per confermarla io ho fatto non meno di 80 osser-
„ vazioni con quattro diversi termometri d'incastra-
„ ture differenti appesi alternamente ed esposti ai
„ raggi del Sole, o da questi difesi dall'ombra d'un
„ albero in un'aperta pianura a qualche distanza
„ dalla città di Ginevra. Il risultato fu, che nel mio
„ miglior termometro a palla isolata la differenza per
„ le due diverse situazioni fu solamente di due gra-
„ di Far.; negli altri più o meno secondo che più o
„ meno eran connessi coll'incastatura. „ A questo
s'aggiunga, che l'autore in quattro delle osservazioni
da lui fatte alla cima del monte Mole, avendo osser-
vato il termometro al Sole ed all'ombra, trovò anche
allora una differenza di 2° , 075 Far.

68. Per determinare la temperatura media della
colonna aerea da misurarsi col barometro comune
usanza è di sospendere nelle due stazioni considerate
come estremità della colonna medesima due termo-
metri distanti circa cinque piedi da terra, e di pren-
der la media delle due altezze da questi indicate.
Ma il sig. Pictet osserva con ragione, ottenersi per
tal modo non la temperatura media della colonna,
ma quella dei due strati d'aria distanti cinque pie-
di da terra alle due stazioni, dove il calor dell'aria
è sensibilmente alterato dal riverbero della terra scal-
data dal Sole. Quest'inconveniente o in tutto o in gran
parte si sfuggirebbe se i termometri si sospendessero

ad un'altezza molto maggiore; ma in pratica assai difficile o a dir meglio impossibile ne sarebbe l'esecuzione. Ma l'inconveniente può togliersi eziandio determinando con esatti esperimenti e fatti a tutt'agio in ore, giorni, e stagioni diverse la corrispondenza di due termometri, l'un posto a cinque piedi da terra, e l'altro ad una distanza molto maggiore. Or questo è ciò appunto, che l'eccellente fisico sig. Pictet ha con somma diligenza eseguito, e colla solita sua chiarezza spiegato ne' bei Saggi di Fisica da lui pubblicati a Ginevra sua patria nell'anno 1790. Alla cima d'un gran palo annerita per toglier la riflessione de' raggi solari, ed alla distanza di 75 piedi da terra egli sospendeva un termometro che nel breve tempo di 5 a 6 secondi si faceva scendere a terra per osservarlo; ed un altro ne collocava all'altezza di cinque piedi. Il superiore posto tra il palo ed il Sole nel piano del meridiano era sempre esposto ai raggi solari: e lo sperimentatore teneva sempre all'ombra del palo l'inferiore. In giorni e stagioni e circostanze diverse del Cielo egli osservò la corrispondenza di questi termometri nelle diverse ore del giorno; e n'ebbe i seguenti risultati espressi colle sue medesime parole.

„ Alla mattina due o due ore e mezzo incirca
„ dopo il nascer del Sole i due termometri son d'accordo, ed indicano la stessa temperatura prescindendo dalle piccole oscillazioni prodotte da circostanze accidentali. A misura che il Sol s'innalza il termometro inferiore si scalda più del superiore; e la loro maggior differenza, che ha luogo nel momen-

T. II. P. II.

„ to più caldo del giorno, è di circa due gradi della divisione in 80 parti; de' quali il termometro inferiore è più alto del superiore.

„ Passato questo *massimo* di differenza i due termometri si riaccostano; e qualche tempo prima del tramontar del Sole si raggiungon nuovamente; poi si sorpassano in senso contrario: il termometro inferiore sta più basso dell'altro: caduto il Sole la differenza cresce velocemente; e verso la fin del crepuscolo giunge a due gradi, e talora anche più. Questa differenza segue ad esser la stessa durante la notte ed il crepuscolo del mattino; e solo alcun tempo dopo il nascer del Sole i termometri cominciano a riaccostarsi per raggiungersi di nuovo e attraversarsi circa due ore dopo.

„ Tal è il movimento costante dei due termometri distanti cinque e 75 piedi da terra ogni volta che il tempo è tranquillo e sereno: egli è lo stesso nelle varie stagioni dell'anno, e non ostanti i venti e le nubi, sebben meno sensibilmente in quest'ultimo caso: e ne' soli giorni compiutamente e uniformemente nuvolosi, e quando regna un vento fortissimo o una densa nebbia i due termometri distanti 70 piedi son presso a poco d'accordo in tutto il corso del giorno. „

Da questo ragguaglio dell'autore io non posso raccogliere la legge, con cui il termometro inferiore va, in confronto del superiore, innalzandosi dopo il nascer del Sole per lo spazio di due gradi nell'intervallo di circa due ore e mezzo; e di altri due gradi dal momento, in cui ha raggiunto il superiore fino a

tre ore di sera: e lo stesso dicasi del suo abbassamento dalle 3 ore fino a quella del Sol cadente, e poi della fine del crepuscolo vespertino. Per uscir di questa incertezza è dunque d'uopo ricorrere a qualche supposizione; e la più naturale a me par quella dell'uniformità nella progressione delle differenze dei due termometri. Di questa mi servirò dunque allorchè avrò occasione di ridurre le altezze osservate ad una data ora d'un dato giorno in un termometro distante cinque piedi da terra all'altezza, che nello stesso momento avrebbe avuta un altro termometro alla distanza di piedi 75.

69. Il celebre Bouguer aveva detto che negli alti monti del Perù, se dalle prime quattro cifre della differenza dei logaritmi delle altezze barometriche osservate al piede ed alla sommità d'un monte si sottrae un trentesimo, il residuo dà la vera altezza del monte in tese di Francia; ma aveva anche soggiunto, che questa regola si verifica soltanto nelle parti della *Cordeliera*, che stan sopra la valle di Quito. Il sig. De Luc osservò, che in questa regola non farsi menzion veruna della temperatura dell'aria, sebbene al variar di questa debba variar la lunghezza della colonna aerea, che corrisponde ad un'egual differenza dei logaritmi. Egli vide però che, se per la temperatura poco variabile nelle osservazioni barometriche degli accademici francesi convien sottrarre un trentesimo della differenza logaritmica per aver l'altezza del monte, la sottrazione sarebbe stata minore ad una più alta temperatura; e che questa cresciuta ad un certo grado avrebbe resa nulla la sottrazione,

e data l'altezza in tese francesi colla sola differenza logaritmica. Ma questo (io credo avrà egli detto seco medesimo) perchè non dovrà verificarsi nelle numerose osservazioni da me fatte sul monte Saleve a tante diverse temperature? Esaminiamole dunque attentamente; e vediamo a quale altezza media dei termometri esposti all'aria nelle due stazioni inferiore e superiore corrisponda una differenza logaritmica eguale alla vertical distanza delle stazioni. Egli fece l'esame, e trovò, come dice al num. 588: „ che cal-
„ colate tutte le osservazioni coi logaritmi; e combi-
„ nando tutte quelle, nelle quali la differenza dei lo-
„ garitmi dava presso a poco l'altezza dei luoghi in
„ millesimi di tesa, il calor medio nel tempo delle
„ osservazioni era stato corrispondente a $16^{\circ} \frac{4}{5}$ del ter-
„ mometro di mercurio diviso in 80 parti fra i due
„ termini fissi. „

L'autore, dopo aver dato questo semplice cenno, nulla ha detto del modo, con cui trovò il suo risultato: ond'io mi son determinato a verificarlo. A tal fine ho avvertito primieramente, che le osservazioni fatte alle tre prime stazioni; nelle quali per le locali circostanze indicate dall'autore la temperatura media è troppo incerta, debbon esser escluse. Ho separate le osservazioni fatte al nascer del Sole, perchè dan risultati troppo diversi da tutte l'altre. Finalmente ho distinte le osservazioni fatte al Sole dalle fatte a ciel coperto, o in dì sereni, ma a Sol tramontato.

Affin d'ottenere con qualche precisione la cercata temperatura mi son ristretto a quelle osservazio-

ni sole, nelle quali la differenza tra l' altezza vera ed il risultato logaritmico non è sensibilmente maggiore di 4 piedi, differenza, che può esser attribuita all' incertezza d' un ventesimo di linea nella misura delle altezze barometriche. Questa condizione si verifica in 16 osservazioni fatte in giorni sereni; in 8 di ciel coperto; ed in quattro del nascer del Sole. Calcolate senz' alcuna correzion dei termometri le osservazioni fatte in giorni sereni, e chiamate T , t le altezze dei termometri, ho trovati i seguenti valori del-

la temperatura media $\frac{T + t}{2}$

16 , 105

16 , 105

16 , 965

17 , 23

17 , 395

16 , 535

16 , 75

17 , 825

18 , 47

16 , 535

17 , 717

16 , 965

16 , 75

17 , 395

16 , 32

16 , 643

Somma 271 , 705

La somma è 271,705; la qual divisa per 16 dà 16,982 per valor medio.

I valori di $\frac{T+t}{2}$ nelle osservazioni di ciel coperto furono

16, 535

16, 75

16, 965

17, 395

16, 965

16, 965

16, 535

16, 428

Quì la somma è 134, 538, e la temperatura media 16, 817. La differenza di questi due medii è di 165 millesimi di grado.

Unendole poi tutte insieme, come soleva fare il De Luc, si trova la somma 406, 243; ed il medio 16, 927; la cui differenza da 16, 75 è di 177 millesimi di grado; quantità, che senza inconveniente si può neglimentare.

70. Per le sperienze del sig. Pictet nelle osservazioni fatte a ciel coperto le altezze d' un termometro distante 75 piedi da terra sarebbero state uguali a quelle del termometro distante cinque piedi. Ma lo stesso non può dirsi delle osservazioni fatte al Sole in ore diverse da quelle, in cui i due termometri son

d'accordo. Nelle altre ore per aver la corrispondenza dei due termometri convien primieramente diuinuir di due gradi Far. tutti i valori di T, t ; affin d'avere le altezze, a cui si sarebber tenuti all'ombra. A 2 gra. Far. corrispondon o $\frac{2}{3}$ Ré:, cui per maggior semplicità si può senz'inconveniente sostituire un grado intero. D'un grado ho io quindi sminuite tutte le altezze T, t dei termometri esposti al Sole. Ora dichiarerò in qual maniera da queste altezze dei termometri supposti all'ombra e distanti cinque piedi da terra ho dedotte le altezze corrispondenti dei termometri esposti al Sole alla distanza di piedi 75.

Le osservazioni del sig. De Luc furon fatte presso a Ginevra per la cui latitudine ho calcolate le ore del nascere e cader del Sole, e della fine del crepuscolo vespertino pei mesi e pe' giorni delle osservazioni. Ciò premesso suppongo, che per un dato giorno dell'anno il Sol nasca a minuti N del mattino; nel qual momento il termometro superiore è di due gradi più alto dell'inferiore. Or, dovendo per le sperienze del sig. Pictet questa differenza esser nulla due ore e mezzo dopo all'incirca, ciò avverrà a minuti $N + 150$. Sia T l'altezza del termometro inferiore osservata a minuti n del mattino; e si chiami T' l'altezza corrispondente del superiore. Se fosse $N = n$ sarebbe $T' = T + 2$; ma quando n è $= N + 150$, T' è $= T$. Affin di trovare il valor di T' nelle ore intermedie; nelle quali io suppongo, come ho già detto, le variazioni uniformi; avrem dunque l'analogia

$$150 : n - N = 2 : \frac{n - N}{75}; \text{ il cui quarto termine indi-}$$

ca di quanto nei due termometri è diminuita la differenza. Nel tempo dell'osservazione è dunque $T' =$

$$T + 2 - \frac{(n - N)}{75}.$$

Nella seconda osservazione della stazion IV, a cagion d'esempio; che si fece nel giorno 12 febbrajo ad ore 9 $\frac{1}{4}$ del mattino fu $N = 414$; $n = 555$;

$$n - N = 141; \text{ ed } \frac{n - N}{75} = 1,88. \text{ Dunque } T' = T +$$

$2 - 1,88 = T + 0,12$. Le temperature osservate al Sole furono $T = + 3,85$; $t = 0,84$; e, fatta la riduzione per l'esposizione all'ombra, $T = + 2,85$; $t = - 0,16$. Or quindi viene $T' = + 2,97$; e $t' = - 0,4$. La correzione in questo caso è piccolissima, perchè l'osservazione si fece a due ore e quasi mezzo dopo il nascer del Sole.

Se l'osservazione è fatta tra l'ora, in cui i termometri son d'accordo e le tre della sera, l'intervallo di tempo, cui corrisponde l'alzamento di due gradi nel termometro inferiore in confronto del superiore è di minuti $720 + 180 - N - 150 = 750 - N$, e quello, che sta fra l'ora suddetta e l'osservazione $n - N - 150$. Sarà dunque $750 - N : n - N - 150 = 2 :$

$$\frac{2(n - N - 150)}{750 - N}; \text{ e } T' = T - \frac{2(n - N - 150)}{750 - N}$$

Nell'osservazione 13^a della stazion IV fatta il dì 7 Agosto ad ore 3 $\frac{3}{4}$ del mattino fu $N = 288$; $n = 525$;

$$750 - N = 462; \quad n - N - 150 = 87; \quad \text{e} \quad \frac{2(n - N - 150)}{750 - N} =$$

$$\frac{174}{462} = 0,38. \quad \text{Ciò posto è } T' = T - 0,38. \quad \text{Le altez-}$$

ze osservate colla solita diminuzione d'un grado furono 16,29; 13,92; e per conseguenza fu $T' = 15,91$; $t' = 13,54$.

Dopo 3 ore di sera il termometro inferiore s'abbassa; e raggiunge il superiore verso il cader del Sole. Se questo tramonta ad N minuti della sera, l'intervallo per la diminuzion di due gradi sarà $N - 180$; e quindi, se l'osservazione fassi a minuti n della se-

$$\text{ra, si avrà } N - 180 : n - 180 = 2 : \frac{2(n - 180)}{N - 180}.$$

$$\text{Ciò posto sarà } T' = T - 2 + \frac{2(n - 180)}{N - 180}$$

Nell'osservazion 15^a stazion IV del giorno 12 Aprile, ore 3 $\frac{3}{4}$ della sera fu $N = 441$; $n = 225$; e quin-

$$\text{di } \frac{2(n - 180)}{N - 180} = \frac{90}{261} = 0,345; \quad T' = T - 2 + 0,345 =$$

$T - 1,655$. Le altezze osservate dei termometri colla solita diminuzione furono 17,685; 14,782; e per conseguente fu $T' = 16,03$; $t' = 13,127$.

Finalmente dal cader del Sole fino al crepuscolo vespertino il termometro inferiore scende sotto il superiore di altri due gradi. Siano N i minuti del cader del Sole; N' quei del crepuscolo; ed n quelli

T. II. P. II.

dell'osservazione; sarà $N' - N : n - N = 2 : \frac{2(n - N)}{N' - N}$;

e $T' = T + \frac{2(n - N)}{N' - N}$. In questi casi, non essendo

i termometri esposti al Sole non dee farsi alle altezze loro la solita diminuzione d'un grado.

L'osservazion 15^a della stazion V fu fatta nel giorno 7 Settembre a 6 ore e mezzo della sera. In essa fu dunque $N' = 492$; $N = 387$; $n = 390$; e per

conseguente $\frac{2(n - N)}{N' - N} = \frac{6}{105} = 0,057$; e $T' = T +$

$0,057$. Le osservazioni diedero $T = 16,915$; $t = 16,105$; onde risulta $T' = 16,972$; e $t' = 16,162$.

Con questo metodo io ho calcolate tutte le temperature delle 16 osservazioni fatte in giorni sereni;

e n' ho avuti i seguenti valori di $\frac{T' + t'}{2}$

16 , 705

14 , 735

15 , 605

14 , 641

15 , 225

15 , 415

14 , 161

15 , 655

17 , 099

15 , 419

14 , 909

15 , 871

15 , 533

16 , 117

13 , 612

15 , 512

La somma è 246 , 224; e questa divisa per 16 dà il valor medio 15 , 389. Se non avessi fatta la riduzione delle temperature dal Sole all'ombra, il medio sarebbe 16 , 389 minore del termine fisso di De Luc un po' meno di $\frac{2}{3}$ di grado. Ma questa differenza già per se stessa assai piccola può anche in gran parte attribuirsi all'incertezza dei calcoli alquanto ipotetici. Noi possiam dunque ritenere il termine fisso 16 , 75 del sig. De Luc pei termometri esposti al Sole a cinque piedi da terra; e ridurlo a 15,75 pei termometri egualmente esposti al Sole; ma alla distanza di piedi 75.

In quattro delle osservazioni fatte al nascer del Sole la differenza non oltrepassò i quattro piedi; ma la lor media temperatura fu solo di gradi 11 , 59. Per mancanza di esperienze fatte al nascer del Sole io non so di quanto il termometro debba in quell'ora esser più alto al Sole che all'ombra; ma non credo, che la differenza possa esser maggiore d'un mezzo grado. D'un mezzo grado avrebbe dunque a diminuirsi l'altezza osservata; poi, come voglion gli spe-

rimenti del sig. Pictet, si dovrebbe accrescer di due: il che la ridurrebbe ad $11,59 + 1,5 = 13,09$ ancor troppo piccola. Le osservazioni fatte al nascer del Sole, non potendo combinarsi coll'altre assai più numerose io son d'avviso, che si debbano escludere. E così ha fatto il sig. De Luc; il quale ha procurato eziandio di spiegar quest'anomalia per mezzo del vento orientale, che spira per l'ordinario al nascer del Sole.

71. Trovato il termine fisso, cioè la temperatura media della colonna aerea, posta la quale la differenza logaritmica n'esprime immediatamente l'altezza in millesimi di tesa, resta ancora a determinarsi di quanto questa lunghezza sia accresciuta per ogni grado di calore sopra il termin suddetto, di quanto diminuita per ogni grado al di sotto. Il sig. De Luc avrebbe potuto liberarsi da quest'indagine laboriosa prendendo un medio fra i risultati delle sperienze manometriche fatte dai Fisici, e note ai tempi, in cui egli scriveva. Ma a lui probabilmente non parve ben sicura la supposizione; che il calore operi egualmente nell'aria aperta dell'atmosfera e nelle piccole masse d'aria chiuse in un manometro. Determinossi adunque a cercar la legge delle dilatazioni e condensazioni dell'aria con un attento esame delle osservazioni da lui fatte al monte Saleve; nella qual risoluzione non so se più sia da lodarsi la prudenza di lui, o il coraggio e la pazienza. Ma l'irregolarità delle osservazioni fatte al nascer del Sole rendeva inutili i suoi tentativi; e sol dopo averle separate dalle altre ed escluse, egli potè giugnere al fine desiderato.

„ In tutte le mie stazioni (dic'egli al num 607)
„ io cercai qual era il rapporto fra l'altezza del luogo
„ ed il numero medio dei piedi da aggiungersi o da sot-
„ trarsi per ogni grado del termometro presso al punto
„ fisso, e qual legge seguivano i cangiamenti di que-
„ sti rapporti nell'allontanarsi da una parte o dall'al-
„ tra di questo punto determinato. Finita quest'ope-
„ razione vidi tanta conformità fra i rapporti trovati
„ in ogni stazione, e così poca regolarità nelle lor
„ piccole differenze; che mi determinai a combinar
„ tutte le frazioni, ch'esprimevano questi rapporti.
„ Trovai per tal mezzo, che presso la temperatura
„ fissa la correzione per ogni grado del termome-
„ tro era all'altezza del luogo come 1 a 215; e che
„ gli accrescimenti o diminuzioni da farsi a questo
„ rapporto per la differenza dei pesi degli stessi vo-
„ lumi d'aria diversamente scaldata erano con suffi-
„ ciente esattezza proporzionali agli eccessi o ai di-
„ fetti dell'altezza trovata coi logaritmi in confron-
„ to dell'altezza del luogo. O più generalmente: *che*
„ *la correzione da farsi in più o in meno per ogni*
„ *grado del termometro era all'altezza data dai lo-*
„ *garitmi come 1 a 215* „.

Anche quì l'autore s'è contentato di comunicar ai lettori il suo risultato senza dimostrarne almeno con qualch'esempio la verità e l'esattezza. Io procurerò dunque di supplire a questa mancanza; ed a tal fine comincerò a calcolare per mezzo delle osservazioni fatte alle due ultime stazioni, che son le più alte, di quanto l'aria si dilati e condensi ad ogni grado del termometro diviso in 80 frai due termini

fissi. Tutte le regole conducenti a trovar l'altezza dei luoghi per mezzo delle differenze logarithmiche, non ommessa la correzion del calore, son contenute pel num. 39 in questa formola generale:

$$x = 10000 \left(1 + \frac{\frac{1}{2}(T + t) - T'}{n} \right) L \frac{A}{a};$$

nella quale T' esprime la temperatura o il termine fisso; cui corrisponde $x = 10000 L \frac{A}{a}$; $\frac{T + t}{2}$ la temperatura media della colonna aerea per qualunque caso particolare; ed $\frac{1}{n}$ la dilatazione o condensazione dell'aria per ogni grado del termometro sopra o sotto il termine fisso. Pongasi E in luogo di $\frac{1}{n}$; e la formola diverrà

$$x = 10000 \left(1 + \left(\frac{T + t}{2} - T' \right) E \right) L \frac{A}{a}.$$

Il valor di T' determinato colle osservazioni del sig. De Luc è 16, 75. Per mezzo delle stesse osservazioni resta dunque da trovarsi anche il valore di E ; lo che facilmente si ottiene nella seguente maniera. Sia D la distanza verticale dei due barometri posti in osservazione, e sostituendo D ad x la formola sarà

$$D = 10000 \left(1 + \left(\frac{T + t}{2} - T' \right) E \right) L \frac{A}{a};$$

nella quale E sarà incognita. Or questa equivale a

$$(F) D = 10000 L \frac{A}{a} + 10000 \left(\frac{T+t}{2} - 16,75 \right) E L \frac{A}{a};$$

e pel suo mezzo si trova

$$E = \frac{D - 10000 L \frac{A}{a}}{\left(\frac{T+t}{2} - T' \right) 10000 L \frac{A}{a}}.$$

Se $\frac{T+t}{2}$ è $= 16,75 = T'$ la formola F si riduce

a $D = 10000 L \frac{A}{a}$ e più non serve a trovare il valor

di E . Ma se $\frac{T+t}{2}$ è maggior o minore di $16,75$ po-

trà talvolta avvenire, che nella frazion precedente il numeratore ed il denominatore sian di segno contrario; onde risulti per E un valor negativo. Or ciò

vuol dire che, se in siffatti casi $\frac{T+t}{2}$ supera il termi-

ne fisso, la correzione in luogo d'esser additiva divien negativa, e *vice versa*; la qual cosa, supposta l'esattezza del termine fisso è manifestamente contraddittoria. L'osservazion che conduce ad un risultato di tal natura non può esser esatta; e per l'imperfezion sua dev'essere rigettata. Tal è la sedicesima della stazion IV; in cui fu $D = 121,444$ tese; $A =$

5155 sedicesimi di linea; $a = 5011$; $\frac{T+t}{2} = 17,395$;

e $\frac{T+t}{2} - 16,75 = 0,645$. Con questi dati trovasi

$$10000 L \frac{A}{a} = 123,043; D - 10000 L \frac{A}{a} = -1,599;$$

e $0,645 (10000 L \frac{A}{a}) = +79,263$. Sarebbe dunque

$$E = \frac{-1,599}{+79,363} = -0,020148. \text{ Per una temperatu-}$$

ra, che supera il termine fisso di 0,645 invece d'accrescer il risultato logaritmico dovrebbe adunque diminuirlo; o per isfuggir questo assurdo converrebbe accrescer il termine fisso, e renderlo maggiore di 17,395. Suppongasì, per esempio, = 20; e sarà $17,395 - 20 = -2,605$. Avrem dunque $-2,605 (10000$

$$L \frac{A}{a}) = -320,53; \text{ ed } E = \frac{-1,599}{-320,53} = 0,0049887.$$

Questo valor di E non contien più alcun assurdo; e lascia, che la correzione tal si faccia qual è richiesta dalla differenza della temperatura media e del supposto termine fisso, cioè diminuendo l'altezza logaritmica. Ma questa necessità di cangiare il termine fisso legittimamente dedotto da un gran numero d'altre osservazioni è un certo indizio dell'inesattezza di questa.

Applichiam ora la formola alle due ultime stazioni per trarne il valore di E . L'ultima contiene 11 osservazioni; delle quali 6 a temperatura minore del termine fisso, e cinque a maggiore. In questa stazio-

ne $D = 487,778$ te. Per le sei prime osservazioni le altezze medie dei barometri sono $A = 5201,$

33 ; $a = 4635$; e $\frac{T+t}{2} - 16,75 = -5,501$. Con

questi dati trovo $D - 10000 L \frac{A}{a} = -12,869$;

$(\frac{T+t}{2} - 16,75) 10000 L \frac{A}{a} = -2754,066$; e quin-

di $E = \frac{12,869}{2754,066} = 0,0046727 = \frac{1}{214,01}$.

Per le altre cinque fu $A = 5184,6$; $a = 4641,$
 2 ; e $\frac{T+t}{2} - 16,75 = +2,924$. La formola calco-

lata con questi dati mi conduce ad $E = 0,0049274 =$

$\frac{1}{202,95}$. Il valor medio di E vien dunque ad essere

$0,0048 = \frac{1}{208,33}$.

Nella penultima stazione; (in cui $D = 457,08$) sei osservazioni furon fatte a temperature minori del termine fisso; ma la temperatura della sesta è tanto vicina al detto termine, che si deve aver per uguali; e non può servire a determinar il valore di E . Le altre cinque osservazioni danno i seguenti valori medii

$A = 5214,2$; $a = 4683,2$; e $\frac{T+t}{2} - 16,75 = -4,33225$.

T II. P. II

46

Calcolo con questi dati la formola; e trovo $E = 0$,

$$0046368 = \frac{1}{215,665}.$$

Per le 4 osservazioni di temperatura superiore al termine fisso è $A = 5185,5$; $a = 4673,5$; e

$$\frac{T+t}{2} - 16,75 = +2,5499; \text{ e quindi risulta } E =$$

$$0,0048609 = \frac{1}{205,735}.$$

Il medio dei quattro valori di E dedotti dai calcoli precedenti è $0,00477445 = \frac{1}{209,45}$.

La differenza tra questo valore e quello del sig. De Luc è $0,00012326$ quantità così piccola, che nel calcolo delle osservazioni del monte Saleve non può introdurre alcuna sensibile differenza. Ed invero nella prima osservazione della stazion VII, la temperatura essendo stata alla massima distanza dal termine fisso, da questa deve nascer la massima differenza fra i risultati delle altezze calcolate coi due valori di E . Il calcolo si fa colla formola

$$x = 10000 \left(1 + \left(\frac{T+t}{2} - 16,75 \right) E \right) L \frac{A}{a}; \text{ e nel pre-}$$

$$\text{sente caso } A \text{ è } = 5211; a = 4916; \frac{T+t}{2} - 16,75 =$$

$$-15,695. \text{ Sarà dunque}$$

$$x = 10000 (1 - (15,695) E) L \frac{5211}{4916}. \text{ Sostituendo}$$

in quest'equazione i due valori di E si otterranno i due risultati in tese $x = 234,13$ per la supposizio-

ne di $E = \frac{1}{209,45}$; ed $x = 234,616$ per quella di E

$= \frac{1}{215}$; cosicchè la differenza dei due risultati non giu-

gne a 3 piedi per un' altezza di 1420; ed è poco maggiore di $\frac{2}{5}$ per 100.

72. E quì non credo inutil cosa il dimostrare in qual modo dalle osservazioni dell'ultima stazione posson immediatamente dedursi i valori così del termine fisso come dell'espansione o condensazione dell'aria quasi eguali a quelli del fisico di Ginevra. Nelle ipotesi delle espansioni dell'aria uniformi, e della temperatura della colonna aerea espressa dal medio aritmetico delle due osservate alle sue estremità, la formola generale pel calcolo delle altezze è

$$x = B l 10 (1 + T E) L \frac{A}{a}; \text{ nella quale } A, a \text{ son}$$

le altezze corrette dei barometri, e T la temperatura media dei termometri. Se in essa sostituiremo ad x la distanza vertical dei barometri data dalla misura geometrica o dalla livellazione, ed espressa da D , potremo considerar come incogniti i valori di E , e di $B l 10$; e determinarli nel modo seguente.

Per un certo numero d'osservazioni siano A, a le altezze medie dei barometri, T la temperatura media,

e per un numero similmente dato d'altre osservazioni A' , a' , T' le quantità corrispondenti. Da queste supposizioni nascono le due equazioni seguenti

$$D = B l_{10} (1 + T E) L \frac{A}{a}$$

$$D = B l_{10} (1 + T' E) L \frac{A'}{a'}; \text{ ovvero}$$

$$B l_{10} = \frac{D}{(1 + T E) L \frac{A}{a}}$$

$$B l_{10} = \frac{D}{(1 + T' E) L \frac{A'}{a'}}$$

Col mezzo di questi due valori di $B l_{10}$ si formerà dunque una nuova equazione; dalla quale si dedurrà

$$E = \frac{L \frac{A}{a} - L \frac{A'}{a'}}{T' L \frac{A'}{a'} - T L \frac{A}{a}}$$

Nella stazion XV fu $D = 487,778$ te.; ed i valori medii per le prime 6 osservazioni $A = 5201,33$;

$a = 4635$; $L \frac{A}{a} = 0,0500647$; $T = 11,249$. Quelli

delle altre cinque furono $A' = 5184,6$; $a' = 4641,$

2 ; $L \frac{A'}{a'} = 0,0480350$; e $T' = 19,674$. Ora per mez-

zo di questi valori si trova $L \frac{A}{a} - L \frac{A'}{a'} = 0,0019797$;

$T' L \frac{A'}{a'} - T L \frac{A}{a} = 0,38284$; e quindi

$$E = \frac{0,0019797}{0,38284} = 0,0051711.$$

Sostituisco questo valor di E in un di quelli di $B l_{10}$; e mi risulta $B l_{10} = 9207,37$.

Determinate così le due incognite ne sostituisco i valori nella formola generale; e mi viene

$$x = 9207,37 (1 + (0,0051711) \frac{T+t}{2}) L \frac{A}{a}.$$

Per dare anche a questa una forma simile a quella del sig. De Luc la paragono colla formola generale (F) del num. 39, cioè

$$x = 10000 (1 - \frac{T'}{n}) (1 + \frac{T+t}{2(n-T')}) L \frac{A}{a};$$

e mi vengon queste due equazioni

$$10000 (1 - \frac{T'}{n}) = 9207,37; \frac{1}{n-T'} = 0,0051711;$$

ovvero, sostituendo E ad $\frac{1}{n}$,

$$10000 (1 - T' E) = 9207,37; \frac{E}{1-T' E} = 0,0051711.$$

E per mezzo di queste si troveranno i valori di E , e di T' .

Fatto il calcolo ne risulta $E = 0,0047612 =$

$\frac{1}{210,03}$; e $T' = 16,643$; i quali valori sostituiti nella formola (F) del num. 39 danno

$$x = 10000 \left(1 + \frac{T + t - 16,643}{2(210,03)} \right) L \frac{A}{a}.$$

I valori di T' e di n sono in questa formola tanto vicini a quelli del sig. De Luc; che nel calcolo delle altezze non posson condurre a risultati sensibilmente diversi. In fatti nel caso di $T + t = 0$, che ben di rado può aver luogo nelle altezze alquanto grandi, la differenza sarebbe una delle maggiori; ma non passerebbe l'uno e mezzo per mille.

73. Per determinare il valor di E colle osservazioni fatte a ciel coperto io ho calcolate separatamente tutte quelle, che il sig. De Luc ha registrate nelle sue tavole cominciando dalla stazion V. Sedici di queste furon fatte a temperatura inferiore al termine fisso, e nove a temperatura superiore. Le prime ora son maggiori or minori di $0,0046512 =$

$\frac{1}{215}$ espansione del sig. De Luc; e la lor media è $=$

$0,0046348$. La differenza tra questo valore e quello del fisico di Ginevra è $= 0,0000164$; e questa moltiplicata anche per 16 gradi, ai quali nelle osservazioni del monte Saleve non è mai giunto il va-

lore di $\frac{T + t}{2} - 16,75$, porterebbe nei risultati dei calcoli la differenza d' un quarto per mille nell' al-

tezza della stazione. In tutte le osservazioni fatte a ciel coperto, ed a temperatura inferiore al termine fisso parmi dunque, che si possa con sicurezza adottare il valor di E assegnato dal sig. De Luc.

Nelle osservazioni di temperatura superiore al termine fisso una sola, cioè l'ultima della stazion IX dà ad E un valor superiore a 0,0046512. tutte l'altre lo dan minore, ed alcune d'assai. L'osservazione decima della stazion XII conduce ad $E = 0,0016996$ minore del valor di De Luc di 0,0029516. Or questa differenza moltiplicata per 2,2575 valore di

$$\frac{T + t}{2} - 16,75 \text{ nella detta osservazione produce un}$$

eccesso di 6 millesimi e $\frac{2}{3}$ dell'altezza totale, o alquanto più di 17 piedi. E tale appunto è in questo caso l'errore della regola, come si vede nella tavola di questa stazione. Il valor di E per l'ultima osservazione della stazion IX è 0,0055714 superiore al sopra indicato della stazion XII di 0,0038718. Qual possa esser la cagione di tanta irregolarità nelle espansioni dell'aria corrispondenti alle osservazioni fatte a ciel coperto ed a temperatura superiore al termine fisso io non saprei: so però, che una irregolarità così fatta rende molto incerti i risultati delle livellazioni barometriche fatte in tali circostanze di temperatura e di cielo; e che miglior consiglio è l'astenersi allora dal farle.

74. Ma quali saranno i valori di E nelle osservazioni fatte a ciel sereno ma in ore non distanti più di 30 minuti dalle tre pomeridiane? Per queste la

correzione dedotta dalle sperienze del sig. Pictet diminuisce quasi di due gradi la temperatura osservata. Ma si avverta, che la correzion deve farsi anche alla temperatura del termine fisso; la quale nell'osservazion 4^a della stazione XIII fatta a due ore 45 minuti di sera fu di gradi 13,612 pei termometri all'ombra. Con questo valore del termine fisso, e non con 16,75 si avran dunque a calcolare i valori di E nelle osservazioni fatte alle ore anzidette; volendo a quelle applicar la correzione. Eccone alcuni esempi

Stazione VI, osservazion 9^a, Aprile 19, sera 2^{or} 45'.

$D = 203,111$; $A = 5156$; $a = 4915$; temperatura media dei termometri al Sole $\frac{T' + t}{2} = 12,665$; all'ombra 11,665.

$$N = 310; n = 885; \frac{T' + t}{2} - \frac{2(n - N - 150)}{750 - N} = 11,665 - 1,93 = 9,735 = \frac{T' + t'}{2}.$$

Sarà dunque $\frac{T' + t'}{2} - 13,612 = -3,877$. Senza la correzione si ha $\frac{T' + t}{2} - 16,75 = -4,085$.

Fatti i calcoli con questi dati trovo per E i seguenti valori

senza correzione	colla correzione
------------------	------------------

$E = 0,0056320$	$E = 0,0059342$
-----------------	-----------------

Stazion VI, osservazion 17^a; Agosto 29, sera 3^{or} 15'.

$$D = 203,111; A = 5196; a = 4960; \frac{T+t}{2} =$$

$$17,825; N = 401; n = 195; \frac{T'+t'}{2} - 13,612 = +1,349.$$

Valori di E

senza correzione	colla correzione
------------------	------------------

$0,0057001$	$0,0045423.$
-------------	--------------

Stazione VIII, osservazion 15^a; Agosto 7, sera 3^{or} 30'

$$D = 300,083; A = 5189; a = 4850; \frac{T+t}{2} = 21,48$$

$$N = 432; n = 210; \frac{T'+t'}{2} - 13,612 = 5,106.$$

Valori di E

senza correzione	colla correzione
------------------	------------------

$0,0048008$	$0,0044474$
-------------	-------------

Io ho calcolate per simil guisa le altre osservazioni delle tavole del sig. De Luc, fatte alle ore anzidette (eccettuandone per le ragioni da me già in-

T. II. P. II.

dicate quelle di temperatura troppo vicina al termine fisso) e n' ho avuti i seguenti risultati

Valori di E per le temperature inferiori al termine fisso.

senza correzione

colla correzione

0 , 0056320

0 , 0059342

45301

49959

60231

64301

60835

62962

51662

54959

0 , 0274349

0 , 0291523

per le temperature superiori al termine fisso

0 , 0057001

0 , 0045423

48008

44474

45881

42192

48281

47198

45415

42586

39303

37839

60504

49702

78338

67642

48911

46100

0 , 0471642

0 , 0423156

I valori medii dei quattordici sono

senza correzione

colla correzione

0,0053285

0,0051048.

Sostituendo questi valori di E , e quelli di T' , cioè 16,75; e 13,612 nella formola

$$x = 10000 \left(1 + \left(\frac{T+t}{2} - T' \right) E \right) L \frac{A}{a}$$

trovansi risul-

tati quasi eguali fra loro, e per l'ordinario assai vicini a quelli della regola del sig. De Luc.

Prendiamone per esempio l'osservazione 14^a della stazion IX; nella quale fu $D=327,541$; $A=5190$;

$$a=4820; \frac{T+t}{2} - 16,75 = 4,3; \text{ e } \frac{T'+t'}{2} - 13,612 =$$

4,676. Il valor di E senza correzione è = 0,0053285; e colla correzione = 0,0051048.

Calcolando l'altezza senza correzione la formola diviene

$$x = 10000 \left(1 + 4,3 (0,0053285) \right) L \frac{5190}{4820}; \text{ ed in}$$

questo caso il risultato del calcolo è di tese 328,56.

Ma per calcolar l'altezza colla correzione è d'uopo supporre, che i barometri sian trasportati a 75 piedi d'altezza sopra le due stazioni; per la qual supposizione l'altezza del barometro inferiore diminuirà presso a poco di 15 sedicesimi di linea, e quella del superiore di 14. Sarà dunque $A=5175$; ed

$\alpha = 4806$. Per queste supposizioni la formola vien ad essere

$$x = 10000 (1 + 4,676 (0,0051048)) L \frac{5175}{4806} = 327,91.$$

La differenza tra i due risultati è dunque di $\frac{2}{3}$ di tesa su 327,541, cioè alquanto meno di due per mille. Per la regola del sig. De Luc E è $= 0,0046512$; e calcolando la formola con questo valore trovasi $x = 327,63$ maggiore dell'altezza livellata di 0,089 di tesa o poco più d'un mezzo piede. Degli altri due risultati uno supera l'altezza livellata di te. 1,019; l'altro di 0,369.

In genere calcolando le 14 osservazioni coi valori assegnati dal sig. De Luc al termine fisso ed all'espansion dell'aria si han nove risultati o eguali a quei della livellazione o minori tutto al più di 4 piedi; nelle altre cinque i risultati sono quattro volte maggiori di piedi 5, 6, 12, e 16; ma uno è minore di 12; il che indica per mio avviso, doversi le differenze attribuire ad altre circostanze che a quella dell'ora, in cui furon fatte le osservazioni.

Da tutte le cose dette parmi di poter finalmente conchiudere I° che il valore $\frac{1}{215}$ dal sig. De Luc assegnato all'espansioni e condensazioni dell'aria è legittimamente dedotto dal complesso di tutte le sue osservazioni: II° che la sua regola può sicuramente applicarsi anche alle osservazioni fatte in ore assai vicine alle tre pomeridiane; per le quali le sperienze del suo dotto concittadino potevan farla temer difettosa.

75. Il calcolo della formola

$$x = 10000 \left(1 + \frac{\frac{1}{2}(T + t) - 16,75}{215} \right) L \frac{A}{a} \text{ ha due in-}$$

convenienti: il primo di dover in ogni caso particolare sottrarre il termine fisso 16,75 dalla temperatura media osservata: il secondo di aver sempre a calcolar

il valore di $1 + \frac{\frac{1}{2}(T + t) - 16,75}{215}$; per cui deve mol-

tiplicarsi il risultato logaritmico affin d'aver la correzion del calore. Ognun vede, che il primo inconveniente si può facilmente schivare trasportando al termine fisso 16,75 il cominciamento o zero della scala; nel qual caso i gradi superiori al detto termine son positivi; negativi gl'inferiori. Il grado dell'acqua bollente è in questa scala +63,25; quello del ghiaccio in fusione -16,75. Chiamando T' , t' i gradi osservati su questa scala sarà $T' = T - 16,75$; $t' = t - 16,75$; e le altezze si calcoleran colla formola

$$x = 10000 L \frac{A}{a} + \frac{T' + t'}{2 \cdot 215} \left(10000 L \frac{A}{a} \right).$$

Più difficile era il liberarsi dal secondo inconveniente; ma il sig. De Luc ci pervenne coll'ingegnoso ripiego di dare alla scala del termometro una nuova graduazione. Ecco in cosa consiste questo felice ed utilissimo ritrovamento. Sieno T'' , t'' i gradi d'un

termometro diviso in maniera, che $\frac{T'' + t''}{1000}$ equivalga

a $\frac{T' + t'}{2.215}$. In tal caso il moltiplicatore del risultato

logaritmico si riduce ad un millesimo della somma dei due gradi indicati dalla nuova scala del termometro.

Or dalla supposizione di $\frac{T'' + t''}{1000} = \frac{T' + t'}{2.215}$ si de-

duce immediatamente $T'' + t'' = \frac{500 (T' + t')}{215}$.

Si osservi, che i gradi T', t' son presi in un termometro, il cui intervallo frai due termini fissi è diviso in 80 gradi. Dividasi ora lo stesso intervallo in un numero di gradi, che sia ad 80 nel rapporto di 500 a 215 cioè in 186 numero intero dato dall' analogia. I gradi di questa nuova divisione saran dunque $T'' =$

$$\frac{186 T'}{80}; t'' = \frac{186 t'}{80}; \text{ e } T'' + t'' = \frac{186 (T' + t')}{80} =$$

$$\frac{500 (T' + t')}{215}; \text{ e per conseguente } \frac{T'' + t''}{1000} = \frac{T' + t'}{2.215}.$$

Al grado 16,75 della scala divisa in 80 parti corrisponde il grado 38,944, o più semplicemente 39 nella scala divisa in 186. Alla temperatura dell' acqua bollente corrisponde adunque in questa nuova divisione il grado + 147; ed il grado - 39 a quella del ghiaccio in fusione.

Con questa nuova division del termometro la regola del fisico di Ginevra è espressa da questa formola semplicissima

$$x = 10000 L \frac{A}{a} + \frac{(T'' + t'')}{1000} 10000 L \frac{A}{a}.$$

Per veder di quanto essa renda più agevole il calcolo ne serva d' esempio l' osservazion prima della

stazion XV; in cui fu $A = 5209$; $a = 4632$; $\frac{T+t}{2} =$

$7,505$ nel termometro di 30 gradi; e quindi $\frac{T+t}{2} =$

$16,75 = -9,245$. In questo caso abbiain dunque

$x = 10000 \left(1 - \frac{9,245}{215} \right) L \frac{5209}{4632}$. Ora $\frac{9,245}{215}$ è =

$0,042999$; ed $1 - \frac{9,245}{215} = 0,957$. Finalmente $L \frac{A}{a}$ è =

$0,0509858$; e da tutti questi dati viene il calcolo seguente

$$L 10000 = 4 . 0000000$$

$$L \left(L \frac{A}{a} \right) = 8 . 7074492$$

$$L 0,957 = 9 . 9809119$$

$$L x = 2 . 6883611 ; x = 487,934.$$

Nel termometro del sig. De Luc è $T'' = -14,5$; $t'' = -28,5$; e $T'' + t'' = -43$. Dunque per la sua

regola è $x = 509,858 - \frac{43}{1000} (509,858) = 487,934$.

I due risultati sono esattamente uguali; ma il calcolo della regola di De Luc è senza paragone più spedito di quello dell' altra formola.

76. Ma il Professore Hennert nella sua dissertazione da me più volte menzionata *sulla misura delle altezze per mezzo del barometro* disapprova apertamente questa regola, ed il metodo, con cui fu trovata come quello, ch'è secondo lui troppo *empirico*, o fondato unicamente sopra una spezie di giuoco e fortuita combinazione dei numeri. Dice, che il termine fisso ha luogo soltanto nella formola

$$x = \left(\frac{C + c}{2} \right) B L \frac{A}{a} \text{ prossimamente vera, non già nel-}$$

$$\text{l'esatta } x = \left(\frac{2 C c}{C + c} \right) B L \frac{A}{a} : \text{ che anche nella prima il}$$

termine fisso non è costante, ma varia col variar del coefficiente B diverso in Inghilterra ed a Ginevra. Afferma, che tra le osservazioni di Ginevra sette sole ne ha trovate vicine al calor medio $69^{\circ}, 7 F.$ (corrispondenti a $16^{\circ}, 75 R.$); ma che due di queste e non più son esatte; le altre, contenendo errori d'oltre a cinque piedi, non posson aversi per accurate. E qui non finisce la guerra da lui fatta al termine fisso., Questo, dic' egli, è meramente precario, o al-
 „ meno empirico; poichè è fondato su d' un' ipotesi
 „ non provata dall'autor suo con alcuna ragione, cioè
 „ che s' abbia a prender il calor medio fra il supe-
 „ riore e l' inferiore. Ma qual può essere la ragion
 „ di ciò fare? Non altra che quella triviale usanza
 „ aritmetica; per cui tra varii eventi non molto ine-
 „ guali, prendendone il medio, si determina l' even-
 „ to prossimo al vero. Or da questa supposizione del

„ calor medio il chiarissimo De la Grange ha dimo-
 „ strato seguirne; che il calore è presso a poco in
 „ progressione aritmetica, cosa ripugnante alle osser-
 „ vazioni di tutti „. Finalmente l'autor disapprova
 anche il modo con cui il sig. De Luc ha fissata l'e-
 xpansione e condensazion dell' aria sopra e sotto il suo

termine fisso ad $\frac{1}{215}$; e cita a questo proposito il sig.

Damen, che aveva già fatto lo stesso nella sua dissertazione intitolata *De montium altitudine dimetien-
 da* &c. Hagæ Comitum 1783.

Alla congerie di tante obbiezioni parmi, che il celebre fisico di Ginevra avrebbe ad un di presso potuto rispondere a questo modo. Voi m' opponete, che delle sette osservazioni vicine al termine fisso due sole son esatte; le altre, conteneudo errori maggiori di cinque piedi non posson aversi per accurate. Ma la mia fissazione del grado $16,75 R = 69,69 F.$ non è tratta da sette osservazioni: essa è dedotta da tutte quelle, in cui la differenza tra il risultato logaritmico e la vertical distanza delle stazioni non è maggiore di quattro piedi. In queste prendete i valori di

$\frac{T + t}{2}$; uniteli tutti in una somma; dividetela pel nu-

mero delle osservazioni; e giungerete ad un risultato ben vicino a $16,75$.

Ma il mio metodo, dite voi, è troppo empirico: esso è unicamente fondato sopra una specie di giuoco, e fortuita combinazione dei numeri. Sia pure. Ma

T. II. P. II.

in tutti i metodi più diretti la determinazione del coefficiente costante, e quella dell'espansion dell'aria per ogni grado del termometro sopra una data temperatura si deduce da una quantità grande di numeri dati da osservazioni ed esperienze accurate. Direte voi dunque, che anche queste determinazioni sieno uno scherzo dei numeri accidentale? Voi nol direte certo; ed io ne conchiudo: niuna buona ragione avervi indotto a dirlo del mio sotto il nome d'empirico da voi disprezzato.

Mi opponete, ch'io suppongo il calor decrescente presso a poco in progressione aritmetica; e date per certo, esser quest'ipotesi contraria all'osservazione universale. Ma quali son dunque le osservazioni, che provin la falsità dell'ipotesi della progressione aritmetica; e che di quella dell'armonica stabiliscano la verità e l'esattezza? Le osservazioni termometriche fatte contemporaneamente a varie distanze verticali servon a determinare la quantità dell'abbassamento del liquore nel termometro per un dato innalzamento di questo nell'atmosfera. Ma ciò non basta per conchiuderne di quanto il liquor s'abbassi per ogni tesa a cagion d'esempio, di cui s'innalza il termometro. Convien sapere di più qual sia la legge della diminuzion del calore ascendente; e per iscoprirla dovrebbe farsi un gran numero d'osservazioni a distanze uniformemente crescenti, come sarebbe di 100 in 100 tese; affin di vedere coll'ajuto di questo metodo empirico da voi spregiato ma necessario in qual ragione si corrispondano gl'innalzamenti del termometro, e le depressioni del suo liquore. Ma queste

osservazioni nè si son fatte, nè sarebbero agevoli ad eseguirsi. Lo stesso sig. De la Grange da voi citato, dopo d'aver dimostrato, che la mia regola conduce

all'equazion differenziale $-\frac{dy}{y} = \frac{dx \cdot 110}{1+t} \cdot \frac{1}{215}$; ove t espri-

me il numero dei gradi del termometro sopra 16,75 soggiunge queste precise parole: „ qui non si dovrà „ far altro che avere il valor di t in x o in y ; ma „ questo non è facile: poichè, sebben sia costante „ che, crescendo le altezze dell'atmosfera coll'allon- „ tanarsi dalla superficie terrestre, il calor diminui- „ sce, non si è ancor potuto determinar la legge di „ questa diminuzione nè per teoria nè per esperien- „ za „. E notate, che lo stesso egli avrebbe detto del-

la formola generale $-\frac{dy}{y} = \frac{dx}{BX}$; cioè che l'espressio-

ne della funzione X in x o in y non s'è ottenuta ancora nè per teoria, nè per esperienza. Egli parla in appresso dell'ipotesi della diminuzion del calore in progressione armonica proposta dal sig. Eulero; ma non ne fa uso veruno per determinar la legge delle rifrazioni astronomiche; al qual fine si serve della mia regola, che suppone i decrementi del calore in una progressione assai vicina all'aritmetica.

Io non so dunque con qual fondamento voi ab-

biate affermato, esser la formola $x = \left(\frac{2Cc}{C+c} \right) B L \frac{A}{a}$

esclusivamente vera ed esatta; il che suppone, che la diminuzion del calore ascendente in progressione armonica sia la vera ed unica legge della natura. Ma quando questo ancor fosse vero, ne seguirebbe egli per ciò; che i risultati della vostra formola dovessero essere sensibilmente diversi da quei della mia? Vediamo. La sola differenza delle due formole sta nelle

due frazioni $\frac{C+c}{2}$; $\frac{2Cc}{C+c}$; delle quali la prima è il

medio aritmetico, la seconda l'armonico frai calori delle due stazioni. La prima è alquanto maggiore della seconda; e la differenza loro si riduce a

$\frac{(C-c)^2}{2(C+c)}$ quantità piccolissima anche per le massime

distanze verticali delle stazioni; cui corrisponde anche la differenza massima dei calori. Chiamata E l'espansion dell'aria per ogni grado del termometro detto di Réaumur cominciando dalla temperatura del

ghiaccio la differenza diviene $\frac{((T-t)E)^2}{2(2+(T+t)E)}$. Il va-

lor di E per la mia regola è $= 0,0046512$ facendo cominciar le espansioni dal grado 16,75; ma trasportandone il cominciamento al grado zero è $= 0,0050441$; e di questo valore mi servirò per determinare una differenza così grande, che non può aver luogo nelle altezze dei monti accessibili, ma in quelle soltanto, cui giungono qualche volta i globi aerostatici con osservatori provveduti di strumenti meteorologici. Sia

$T = 25$; $t = -5$; il che suppone un'altezza di circa 3000 tese. Sarà dunque $((T - t) E)^2 = 0,022899$; e $2(2 + (T + t) E) = 4,201764$. La differenza sarà

$$\text{quindi} = \frac{0,022899}{4,201764} = 0,0054498; \text{ cioè poco più de}$$

mezzo per cento; cui corrisponderebbero circa 15 tese su 3000. Nell'osservazion del Monbianco fu $T = 22,6$; e $t = -2,5$. Calcolate con questi dati la differenza; e la troverete $= 0,0035187$; la quale per 2200 tese d'altezza è di te. 7,7.

Nelle mie osservazioni del monte Saleve il valor massimo di $T - t$ non giunse mai a 9° R. Ma anche per 9 gradi, supponendo $T = 10$; $t = 1$, avremo

$$\frac{(C - c)^2}{2(C + c)} = 0,0005; \text{ val a dire, che la differenza de'}$$

risultati per le due formole sarà d'un mezzo per mille. E per 500 tese d'altezza, alla qual non giugne alcuna delle mie stazioni sarebbe d'un quarto di tesa. Si calcoli colle due formole la prima osservazione della stazion XV; ed i due risultati saranno di te. 487,93; 487,33; onde tutta la differenza riducesi ad un decimo di tesa. Il calcolo della mia formola è certamente assai più spedito che quel della vostra. Perchè dunque, a risultati uguali, dovrà darsi alla vostra la preferenza?

Al paragrafo 20 voi prendete a dimostrare che, supposti esatti i risultati della vostra formola

$$x = \left(\frac{2 C c}{C + c} \right) B L \frac{A}{a} \text{ calcolati colle dilatazioni dell'a-}$$

ria della vostra tavola I^a niun termine fisso può aver luogo quando assai diversi sono i calori delle due stazioni; il qual termine però si verifica sempre nell'al-

tra formola $x = \left(\frac{C+c}{2} \right) B L \frac{A}{a}$.

Per non allungarmi di troppo io non entrerò in un minuto esame della vostra dimostrazione; alla quale non poche cose avrei da opporre, e per mio avviso non lievi. Dirò soltanto, che, se pel nome di *termine fisso* s'intende il caso, in cui la differenza logaritmica moltiplicata per 60000 da immediatamente l'altezza in piedi francesi, esso ha luogo egualmente nelle due ipotesi della diminuzion del calore: in

quello della progressione armonica quando $\frac{2 C c}{C+c}$ è = $\frac{60000}{B}$: in quella della progressione aritmetica quando è $C \frac{C+c}{2} = \frac{60000}{B}$. Ma se per termine fisso s'intende il nu-

mero dei gradi corrispondente alla temperatura media della colonna aerea nei casi anzidetti, esso conviene esclusivamente alla progressione aritmetica: ed eccone la ragione. Per l'ipotesi della progressione aritmetica le

altezze son date dalla formola $x = B l 10 \left(\frac{C+c}{2} \right) L \frac{A}{a}$;

e dal complesso di tutte le mie osservazioni si deduce, che per averla in piedi di Francia dee porsi $B l 10 = 55325,58$; $C = 1 + (0,0050441) T$; e $c =$

$1 + (0,0050441) t$; i quali valori la riducono ad

$$x = 55325,58 \left(1 + (0,0050441) \frac{T+t}{2} \right) L \frac{A}{a}.$$

Ora, affinchè questa formola dia le altezze in piedi francesi per mezzo della sola differenza logarithmica moltiplicata per 60000, egli è mestieri, che 60000

$$\text{sia} = 55325,58 \left(1 + (0,0050441) \frac{T+t}{2} \right): \text{e quindi}$$

$$1 + (0,0050441) \frac{T+t}{2} = \frac{60000}{55325,58} = 1,0845. \text{ In}$$

quest' equazione prendo per incognita la temperatura

$$\text{media } \frac{T+t}{2}; \text{ e trovo, esser questa} = \frac{0,0845}{0,0050441} =$$

$$16,751.$$

Nell' ipotesi della progressione aritmetica le altezze son dunque date in piedi dalla differenza logarithmica moltiplicata per 60000 quando la temperatura media aritmetica della colonna d'aria è $= 16^{\circ},75$.

La formola per la progressione armonica è

$$x = B l_{10} \left(\frac{2 C c}{C + c} \right) L \frac{A}{a}; \text{ e questa, chiamando } E \text{ l'e-}$$

spansion dell' aria supposta uniforme, diviene

$$x = B l_{10} \left(\frac{2 (1 + T E) (1 + t E)}{2 + (T + t) E} \right) L \frac{A}{a}. \text{ Anche que-}$$

$$\text{sta darà } x = 60000 L \frac{A}{a} \text{ quando sia}$$

$$\frac{2(1 + (T + t)E + TtE^2)}{2 + (T + t)E} = \frac{60000}{Bl_{10}}. \text{ Ma da quest' e-}$$

quazione non si può dedurre alcun valor fisso di $\frac{2Tt}{T+t}$

media temperatura armonica della colonna aerea da misurarsi.

Voi osservate, che anche per la formola

$$x = \left(\frac{C + c}{2} \right) B L \frac{A}{a} \text{ il termine fisso non è costante, ma}$$

varia col variar di B diverso in Inghilterra ed a Ginevra. Ed io ne conchiudo, che, se le osservazioni del General Roy sono esatte, e dan nondimeno un coefficiente diverso dal mio, ciò vuol dire, che ad egual temperatura non corrisponde in Inghilterra ed a Ginevra lo stesso rapporto frai pesi specifici dell'aria e del mercurio sotto un' egual pressione atmosferica; e che nei due luoghi diverso debb' essere anche il termine fisso. Ma questa diversità non toglie, che il mio non sia esatto pel luogo delle mie osservazioni, e probabilmente per tutti quelli, ai quali non giugne l'aria marittima per la sua maggior umidità più dilatibile della terrestre ad un' egual temperatura.

Voi mi rimproverate d'aver senza veruna plausibil ragione sostituito il calor medio costante al calor variabile della colonna aerea da misurarsi; ed a questo io rispondo, che parmi d'averlo fatto con fondamento. Se nella diminuzion del calore dal basso all' alto ha luogo qualche legge costante, quella del-

la progressione aritmetica è la più semplice e naturale; ed io per ciò l'ho adottata. E' vero, che sostituendo al calor variabile di questa ipotesi il calor costante e medio aritmetico fra quelli delle due stazioni, non si han precisamente i medesimi risultati; ma la differenza tra questi è quasi insensibile in tutte le mie stazioni; ed anche per le massime altezze dei monti, ove si può salir col barometro, non è maggiore di 2 o 3 tese. Quindi il sig. De la Grange alla pag. 264 della sua Memoria non ha avuto difficoltà d'affermare, che,, trattandosi sol,, tanto di misurar le altezze dei monti col barome,, tro si potrà senza error sensibile riguardare la quan,, tità t come costante, e per maggior esattezza potrà,, prendersi per t il grado medio fra gli osservati al,, le due estremità dell' altezza da misurarsi. (a)

Vengo finalmente all' ultima delle vostre obbiezioni; in cui si tratta della correzion da farsi all' altezza logarithmica per ogni grado di calore sopra o

(a) Il sig. De la Grange chiama t il valor variabile dei gradi del termometro sopra o sotto il termine fisso 16, 75. Quindi io credo, ch' egli abbia inteso di dire; che per t potrà prendersi la differenza tra il grado medio degli osservati alle due stazioni ed il termine fisso.

Anche nella formola del sig. Laplace quella parte del coefficiente,

che spetta al calore è espressa da $(\frac{t+t'}{2})(0,00375)$; dove t, t' sono

le altezze del termometro a scala centenaria sopra la temperatura del ghiaccio in fusione, o sotto se hanno un valor negativo. Ognun vede adunque, che anche in quella formola trovasi il medio aritmetico fra i calori delle due stazioni; contro il quale il sig. Hennert ha tanto declamato.

sotto il termine fisso 16,75, e da me fissata ad $\frac{1}{215}$

In quest' obbiezione voi dite: „ non ha egli dunque „ arbitrariamente stabilito, che i gradi di calore crescano o decrescano colla differenza delle altezze? „ Questo metodo è già stato censurato dal dottissimo Damen nella Dissertazione sull' altezza dei monti ecc. alle pagine 34, 35 „. Rileggete con qualche attenzione il paragrafo 605 della mia opera; e troverete, che io nulla ho stabilito arbitrariamente; troverete anzi, che ho dedotto da un laborioso confronto delle osservazioni questa conseguenza: che l' eccesso ed il difetto dell' altezza logarithmica sopra e sotto la vera è proporzionale al numero dei gradi del termometro sopra e sotto il termine fisso con piccolissime differenze da un caso all' altro.

Ed io non credo, che della verità di questa proposizione si possa ragionevolmente aver alcun dubbio. Imperciocchè anche nei metodi, che si chiaman diretti, dopo di aver determinato coll' esperienza il coefficiente costante B corrispondente ad una determinata altezza del barometro, e ad una data temperatura T' dell' aria e del mercurio, se ne conchiude la formola

$$x = B l_{10} \left(\frac{C + c}{2} \right) L \frac{A}{a};$$

la quale, nella supposizione

ne delle espansioni E dell' aria uniformi, si cangia

$$\text{in } x = B l_{10} \left(1 + \left(\frac{T + t}{2} - T' \right) E \right) L \frac{A}{a}$$

equivalente a quest' altra

$$x = B l_{10} L \frac{A}{a} + B l_{10} L \frac{A}{a} \left(\frac{T+t}{2} - T' \right) E; \text{ nel-}$$

la quale il primo termine esprime l'altezza per la temperatura T' , ed il secondo l'eccesso o il difetto di quell'altezza sopra la vera. Or quest'eccesso o difetto è manifestamente proporzionale alla differen-

za delle temperature $\frac{T+t}{2}$ e T' . La proporzionalità

avrà dunque luogo anche nel caso di $T' = 16,75$; pel quale $B l_{10}$ è $= 10000$, che è appunto il caso mio.

Voi terminate le obbiezioni vostre dicendo, che il mio metodo di determinar la quantità della correzione da farsi al risultato logaritmico è stata censurata dal sig. Damen. Ma la sua censura a che si riduce? Or ora il vedremo. Egli calcolò separatamente quattro delle mie osservazioni; e trovò queste

correzioni $\frac{1}{222}$; $\frac{1}{302}$; $\frac{1}{214}$; $\frac{1}{212}$. La seconda a dir ve-

ro s'allontana sensibilmente dalla mia; la prima le si accosta assai più. Ma si avverta, che queste osservazioni furon fatte nella seconda e terza stazione rimpetto ad uno scoglio, che col suo riverbero rende irregolare la temperatura della colonna aerea da misurarsi. Quest'irregolarità fu picciola nell'osservazion prima fatta ad una bassa temperatura; per cui lo scoglio non potè guari scaldarsi; ma ben più grande fu nella seconda fatta al 7 d'Agosto a cinque ore di sera, e ad una temperatura media di gradi

22 , 75 R. All' opposto le altre due osservazioni fatte in circostanze non soggette ad eccezioni dan le correzioni quasi eguali alla mia. Il sig. Damen aggiunge d'aver calcolate altre osservazioni fatte in tempo caldo ed a piccolé altezze, e d'aver trovato,

che in quelle circostanze la correzione $\frac{1}{215}$ era per

lo più troppo picciola. Ed io rispondo; che in quelle circostanze appunto troppo grande fu l'irregolarità del calore; per cui furon più o meno erronei i risultati della correzione.

Ascoltiam ora la general conchiusione del sig. Damen., Ma poichè, dic' egli, le differenze trovate

„ sono assai piccole, il valor della correzione $\frac{1}{215}$ as-

„ segnato dal sig. De Luc sembra, che sicuramente
 „ si possa ammettere come un valor medio; quantun-
 „ que io creda, ch' egli avrebbe più esattamente o-
 „ perato calcolando separatamente tutte le sue osser-
 „ vazioni., Io non m'oppongo a questa conchiusione per me favorevole. Dico soltanto, che, calcolando ad una ad una tutte le mie osservazioni avrei dovuto faticare assai più per giunger finalmente al medesimo risultato.

Ed io qui terminerò questa specie d' apologia, con cui mi sono arrischiato di far parlare il celebre fisico di Ginevra. Essa potrà sembrare ad alcuno troppo prolissa; ma non a chi penserà, che un autore tanto esatto e laborioso, e di questa parte della fi-

sica tanto benemerito non deve lasciarsi senza una compiuta difesa quand'è ingiustamente censurato da uno scrittore autorevole in un'opera premiata dall'accademia di Gottinga.

77. Un'altra obbiezione potrebbe farsi alla regola del sig. De Luc, la quale al primo aspetto non par mal fondata. Imperciocchè, sendo essa tratta da osservazioni fatte ad altezze tutte minori di 500 tese; nelle quali assai piccola è la diminuzione della gravità, si potrebbe dubitare se la regola possa esser applicata anche alle altezze molto maggiori. Per uscire di quest'incertezza io applicherò le osservazioni della stazion XV non alla formola della gravità costante, come ho fatto al num. 72, ma a quella della gravità decrescente in ragion duplicata delle distanze; e per suo mezzo determinerò i valori così del coefficiente costante come dell'espansione dell'aria. La formola pel num. 53 e la seguente

$$x = B l_{10} \left(\frac{C+c}{2} \right) L \frac{A}{a} + \frac{2 B \left(\frac{C+c}{2} \right) x + x^2}{R} \text{ esprimen-}$$

do per R il raggio osculatore del luogo dell'osservazione.

Suppongasi nota la distanza vertical dei barometri, che si chiami D , ed incognito il valor di B . Sarà dunque

$$D = B l_{10} \left(\frac{C+c}{2} \right) L \frac{A}{a} + \frac{2 B \left(\frac{C+c}{2} \right) D + D^2}{R} ;$$

dalla qual si deduce

$$B = \frac{(R - D) D}{(R l_{10} L \frac{A}{a} + 2 D) \frac{C + c}{2}}.$$

Chiamando T la temperatura media, ed E l'espansione dell'aria sarà $\frac{C + c}{2} = 1 + T E$; e per con-

$$\text{seguente } B = \frac{(R - D) D}{(R l_{10} L \frac{A}{a} + 2 D) (1 + T E)}; \text{ ove } A, a,$$

e T esprimon le altezze medie dei barometri e dei termometri per un dato numero d'osservazioni.

Sian ora A', a', T' le altezze medie corrispondenti per un altro numero d'osservazioni; e queste

$$\text{daran similmente } B = \frac{(R - D) D}{(R l_{10} L \frac{A'}{a'} + 2 D) (1 + T' E)}.$$

Da questi due valori di B risulta quest'altra equazione $(R l_{10} L \frac{A'}{a'} + 2 D) (1 + T' E) + (R l_{10} L \frac{A}{a} + 2 D) (1 + T E)$; dalla qual si deduce

$$E = \frac{R l_{10} (L \frac{A}{a} - L \frac{A'}{a'})}{T' (R l_{10} L \frac{A'}{a'} + 2 D) - T (R l_{10} L \frac{A}{a} + 2 D)}.$$

Nel caso della stazion XV abbiamo pel num. 72

$$D = 487, 778; L \frac{A}{a} = 0, 0500647; T = 11, 249;$$

$L \frac{A'}{a} = 0,0480850$; e $T' = 19,674$. Finalmente il valore di R pel num. 67 è $= 3266914,29$.

Fatta nell'equazion precedente la sostituzione di tutti questi valori trovasi $E = \frac{14892}{2888124} = 0,005156$.

Sostituisco questo valor di E in uno di quei di B ; e trovo $B = 3988,405$. Sarà dunque $B l_{10} = 9183,625$.

La formola generale vien quindi ad essere

$$x = 9183,625 \left(1 + \frac{T+t}{2} (0,005156) \right) L \frac{A}{a} + \frac{7976,81 \left(1 + \frac{T+t}{2} (0,005156) \right) D + D^2}{3266914,29}; \text{ nella quale } D$$

esprime il valor dell'incognita x calcolato col primo termine solo.

Applicando per esempio questa formola alla prima osservazione della stazion XV si trova $D = 486,354$; l'accrescimento corrispondente al secondo termine $= 1,306$; e per conseguente l'ultimo risultato è di tese $487,66$. Calcolando colla formola della gravità costante posta al num. 72, si trova $487,611$; e colla regola del sig. De Luc $487,93$. Le differenze di questi risultati son piccolissime; e tutti son quasi eguali all'altezza della livellazione $487,773$.

Calcoliam ora la massima altezza, per la quale siensi fatte col barometro esatte osservazioni (voglio di quella del Mombianco sopra il Lemano) così col-

la regola di De Luc come colla formola precedente della gravità variabile affin di vedere quanta sia la differenza dei risultati. Si avverta però, che in queste osservazioni i termometri furono all'ombra; onde per applicarle alla regola, che li suppone esposti al Sole, ne accrescerò le altezze d'un grado di Réaumur quasi eguale a 2 di Far. Per calcolar le osservazioni abbiain dunque i dati seguenti

$A = 326,6$ lin.; $a = 192,9$; $T = 23,6$; e $t = -1,5$. A queste altezze dei termometri corrispondon quest'altre nella scala del sig. De Luc $T = +15,892$; $t = -42,48$; e $T + t = -26,588$. Da questi dati risulta

$L \frac{A}{a} = 0,2287903$; e per conseguenza l' altezza

cercata è secondo la regola $= 2237,903 - \frac{26,588}{1000}$

$(2237,903) = 2227,072$.

Per far il calcolo colla formola della gravità decrescente abbiaino $\frac{T+t}{2} = 11,05$. Sarà dunque

$1 + (\frac{T+t}{2})(0,005156) = 1,056972$; e da questi

dati risulta il valore del primo termine $D = 2220,83$ tese. L' accrescimento dato dal secondo termine è $= 7,242$; e per conseguenza l' altezza totale è $= 2228,072$; e la differenza dei due risultati si riduce ad una tesa quantità, per un' altezza tanto grande assolutamente neglignabile.

Conchiudiam dunque, che la regola del sig. De

Luc d'un calcolo semplicissimo si può nelle livellazioni barometriche senza alcun sensibil errore applicare anche alle massime altezze.

ARTICOLO II

Correzione della regola del sig. De Luc proposta dal Cavalier Shuckburg, ed esame delle misure geometriche, sulle quali è fondatu.

73. Il Cavalier Shuckburg, trovandosi a Ginevra con una copiosa suppellettile di buoni strumenti astronomici e fisici, volle verificar la regola del sig. De Luc nel luogo medesimo, in cui l'autore avea fatte tante osservazioni per istabilirla. A questo fine egli misurò geometricamente l'altezza della sommità del monte *Salève* sopra una stazion inferiore; e trovò, dopo aver fatte con somma diligenza le osservazioni barometriche contemporanee alla cima del monte ed alla stazion inferiore, che queste calcolate colla regola di De Luc davano un'altezza minore della geometrica di 2 e quasi un terzo per 100.

Io non dubito dell'esattezza delle sue osservazioni barometriche; dubitando però, ch'egli abbia potuto ingannarsi nei calcoli della misura geometrica, ho voluto verificarli; e non senza maraviglia gli ho trovati erronei per modo, che la vera altezza calcolata esattamente sulle sue misure della base e degli angoli è quasi perfettamente conforme alla regola del sig. De Luc: poichè ne supera il risultato d'un sol terzo di tesa su 434, 72, o di 8 per diecimila.

T II. P II.

Ora, affinchè il lettore possa giudicarne con fondamento, riferirò in primo luogo le osservazioni geometriche del fisico inglese; esporrò in appresso i miei calcoli unicamente appoggiati alle sue misure della base e degli angoli; e mostrerò in fine quanto il risultato, cui questi conducono, sia diverso da quello del Cavalier Shuckburg, e quanto per lo contrario s'accosti a quel della regola dell'accuratissimo fisico di Ginevra.

Sir Shuckburg (com' egli dice nella II^a parte del volume LXVII delle Transazioni filosofiche, pag. 518) misurò appiè del monte *Saleve* la base $A' B'$ (fig. VI) d'un triangolo, il cui vertice C' era la sommità del monte; e trovolla di piedi inglesi 2760 , 8. Misurò poi gli angoli A' , B' , C' ; e n' ebbe $A' = 58^{\circ} 28' 49''$, 25; $B' = 111^{\circ} 52' 16''$; e $C' = 9^{\circ} 35' 54''$, 75. Finalmente, calcolato il triangolo ne conchiuse $A' C' = 15286$, 4 pie. ing.; e $B' C' = 14041$, 7. Verificati i calcoli io gli ho trovati esatti colla sola differenza d'un decimo di piede in amendue le lunghezze.

L'inclinazione delle visuali $A' C'$, $B' C'$ alla retta orizzontale fu dall'osservatore determinata nel modo seguente.

Altezza di C' sopra A'

Inclinazione di $A' C'$ $10^{\circ} \quad 33' \quad 2''$

Correzion della parte osservata del

segnale $- 1' \quad 38''$

Correzion per la linea di collima-

zione $- 59''$

Correzion per la rifrazione $- 27''$

Vera altezza di C' sopra A' $10^{\circ} \quad 29' \quad 58''$

Depressione

Depressione di A' sotto C' $10^{\circ} \quad 29' \quad 18''$

Correzion { pel segnale $+ 16''$
per la collimazione . . . $+ 59''$
per la rifrazione $+ 27''$

Vera depressione di A' sotto C' . . $10^{\circ} \quad 31' \quad 0''$

Arco intermedio o curvatura . . . $- 2' \quad 30''$

Vera altezza di C' sopra A' per l'os-

servazione in C' $10^{\circ} \quad 28' \quad 30''$

Altezza media di C' sopra A' . . $10^{\circ} \quad 29' \quad 14''$

Altezza di C' sopra B'

Inclinazione di $B' C'$	11°	$20'$	$26''$
Correzione {	pel segnale	$- 1'$	$38''$
	per la collimazione . .		$- 59''$
	per la rifrazione		$- 26''$

Vera altezza di C' sopra B' 11° $17'$ $23''$

Depressione

Depressione di B' sotto C'	11°	$19'$	$47''$
Correzione	{	pel segnale	$- 59''$
		per la collimazione . .	$+ 59''$
		per la rifrazione	$+ 26''$

Vera depressione di B' sotto C' . . 11° $20'$ $18''(a)$

Arco intermedio $- 2'$ $18''$

Vera altezza di C' sopra B' per l'os-

servazione in C' 11° $18'$ $0''$

Altezza media di C' sopra B' . . . 11° $17'$ $41'', 5$

(a) Qui è scorso qualch'errore di stampa o nella somma o nella correzion del segnale. Io supporrò esatta la somma, e che la correzion del segnale debba esser $- 54''$.

Altezza di B' sopra A'

Angolo d' inclinazione della ba-

se $A' B'$ $0^{\circ} \quad 27' \quad 0''$ Error della collimazione $- 59''$ Altezza di B' sopra A' $0^{\circ} \quad 26' \quad 1''$

Depressione

Depressione di A' sotto B' $0^{\circ} \quad 27' \quad 4''$ Error della collimazione $+ 59''$ Depressione di A' sotto B' $0^{\circ} \quad 28' \quad 3''$ Arco intermedio $- 27''$ Altezza di B' sopra A' per l' osser-vazione in B' $0^{\circ} \quad 27' \quad 36''$ Altezza media di B' sopra A' . . . $0^{\circ} \quad 26' \quad 49''$

Prima di esporre i miei calcoli io farò su questi dati alcune osservazioni. E primieramente io non so vedere per qual ragione il fisico inglese, volendo determinar l'altezza di C' sopra A' per mezzo dell'angolo medio frai due d'altezza e di depressione, abbia posta frai dati anche la rifrazione; poichè questa nel far la somma, di cui prendesi poi la meta,

deve per la contrarietà de' segni necessariamente svanire. In oltre perchè ha egli supposto nell' osservazione fatta in A' l'angolo al centro di $2' 30''$, e la rifrazione di 27 secondi? Agevol cosa è il dimostrare, che, se gli angoli d' altezza e di depressione apparente sono esatti, le due supposizioni son contraddittorie tra loro. Imperocchè nella formola di rifrazione $a - r = d - \omega + r$ si ha in questo caso $a = 10^\circ 30' 25''$, e $d = 10^\circ 30' 33''$. Dunque, se l'angolo al centro ω è $= 2' 30''$, posti nella formola questi tre valori, sarà $r = \frac{2' 22''}{2} = 1' 11''$ non $27''$. Ma, se r è $= 27''$, l'angolo al centro $\omega = 2r - a + d$ sarà $1' 2''$ non $2' 30''$.

Ma, lasciate queste inesattezze da parte, io dico; che le osservazioni fatte in A' , C' non danno altro che gli angoli d' altezza e di depressione apparenti; ma aggiungo che, se questi sono esatti, si può per mezzo loro e della lunghezza già nota della visuale $A' C'$ determinare l'angolo al centro e la rifrazione. Or, ciò non avendo fatto l'osservatore, io lo farò in vece sua; ma a questo fine non sarà cosa inutile il determinar prima di quanto la sua base sia stata superiore al livello del mare. Le tre osservazioni barometriche fatte contemporaneamente al punto inferior della base ed alla sommità del *Saleve* calcolate colla regola di De Luc ridotta dal sig. Horsley alle misure inglesi danno, giusta il Cavalier Shuckburg, un'altezza di 2271 pie. ing. Ma le sue osservazioni furon fatte coi termometri distaccati all'ombra, laddove la regola li suppone esposti al Sole. Al num. 67 ab-

biam veduto, che questa circostanza accresce la temperatura di due gradi *F*ar. Il calcolo delle osservazioni dee dunque farsi con quest' aumento di temperatura; ed il risultato sarà di 2277, 504 piè. ing. equivalenti a *te. fran.* 434, 36. Le undici osservazioni dell' ultima stazione di De Luc calcolate nello stesso modo fanno la cima del monte superiore alla sua base di tese 487, 5. Fu dunque la base del primo superiore a quella del secondo di *te.* 53, 14. (*a*)

Il De Luc dice che la sua base fu superior al mare di 211, 67 *te.* (*Ricerche ecc. par.* 648); onde segue, che quella di sir. Shuckburg fu più alta del mare di *te.* 264, 81.

Nel nostro triangolo *ABC* (*fig. I^a*) abbiain dunque $CA = R + 264, 81$ esprimendo per *R* il raggio osculatore della latitudine di Ginevra; il quale pel num. 67 è $= 3266914, 29$. Sarà dunque $CA = 3267179$

(*a*) In fine della memoria di Sir Shuckburg havvi una tavola; in cui fra molt' altre è registrata un' osservazione fatta al punto *A'* della base ed al tetto della chiesa di S. Pietro di Ginevra. In essa la distanza del punto *A'* dal tetto è notata di piè. ing. 24486, 5; e l'angolo di depressione del tetto sotto *A'* 31' 35". Il risultato del calcolo dato dall' osservatore è di 224, 3 piè. ing. $= 35, 076$ *te. fran.* altezza del punto *A'* sopra il tetto di San Pietro. Io ho calcolata quest' altezza colla mia formula del num. 63, supponendo la rifrazione di $\frac{1}{16}$ dell'angolo al centro corrispondente ad un di presso alle circostanze di luogo e di tempo; ed ho trovata l' altezza medesima di *te.* 34, 77 minore d' uno scarso terzo di tesa. Secondo la stessa tavola il tetto di S. Pietro è superiore al Lemano di piè. ing. 249, 1 $= 38, 95$ *te. fran.* L' altezza di *A'* punto inferior della base sopra il Lemano è dunque pel mio risultato di 73, 72 *te.* Al par. 648 delle ricerche del sig. De Luc leggesi, che la sua base fu superiore al lago di 24 *te.* La distanza verticale delle due basi sarebbe dunque per queste misure di 49, 72 *te.* in luogo di 53, 14; lo che porterebbe una differenza di *te.* 3, 42 quantità del tutto neglimentabile nei calcoli, che faremo in appresso.

negligentando un decimo di tesa. Vediam ora qual sia l'angolo al centro nel triangolo CAB , nel quale il lato AB corrisponde alla visuale $A'C'$; che si è trovata di pie. ing. $15286, 4 = 2390, 55$ te. fran. L'angolo d'altezza di C' sopra A' non corretto dalla rifrazione fu $= 10^\circ 30' 25''$. Quindi per far il calcolo abbiamo $CA = 3267179$; $AB = 2390, 55$; e l'angolo intermedio $= 100^\circ 30' 25''$. La metà della somma degli altri due angoli è per conseguente $39^\circ 44' 47'', 5$. Abbiamo in oltre $CA - AB = 3264788, 45$; $CA + AB = 3269569, 55$; e da tutti questi dati viene il calcolo seguente

$$L \operatorname{tang} \frac{B+C}{2} = 9 \cdot 9199086$$

$$L(CA - AB) = 6 \cdot 5138549197$$

$$16 \cdot 4337635197$$

$$L(CA + AB) = 6 \cdot 5144905737$$

$$L \operatorname{tang} \frac{B-C}{2} = 9 \cdot 919272946;$$

$$\frac{B-C}{2} = 39^\circ 42' 19'', 12 \quad C = 2' 28'', 38.$$

L'angolo di depressione di A' sotto C' non corretto dalla rifrazione fu $10^\circ 30' 33''$. Nella formola

di rifrazione $r = \frac{a + w - d}{2}$ pongo i valori precedenti; e mi risulta

$$r = \frac{10^{\circ} 30' 25'' + 2' 28'', 38 - 10^{\circ} 30' 33''}{2} = 1' 10'', 19.$$

Se la misura degli angoli d'altezza e di depressione fosse esatta, la rifrazione sarebbe dunque presso che la metà dell'angolo al centro, cosa manifestamente impossibile: e quindi non si può dubitare, che le misure degli angoli non sian fallaci. Ora per vedere a quanto possa ascender presso a poco l'errore, io

osservo, che pel num. 67 il valore di $\frac{m}{n}$ sarà stato

$= 0,081181$ per una pressione atmosferica di 28 pol. e per la temperatura zero. Non mi è noto a quali altezze fossero il barometro ed il termometro quando furon misurati gli angoli d'altezza alle due estremità della base. Non potendo far meglio io le supporrò dunque uguali a quelle, ch' ebber luogo alla stazione inferiore nella prima osservazion barometrica del fisico inglese, epoca più d'ogn' altra vicina a quella della misura degli angoli. Or questa supposizione mi dà il barometro a pollici francesi 26,643; ed il termometro a gradi 18,6 *R*. Per questa temperatura

il valore di $\frac{m}{n}$ si riduce a 0,073782. Nelle circostanze

della misura degli angoli sarà dunque stato

$$\frac{m}{n} = \frac{26,643 (0,073782)}{28} = 0,070206; \text{ e per conse-}$$

guente $\frac{m}{n} \omega = (0,070206) 148'', 38 = 10'', 417$. Quint-

di avremo il vero angolo d' elevazione $= 10^{\circ} 30' 25'' - 10''$, $417 = 10^{\circ} 30' 14''$, 583 ; ed il vero di depressione $= 10^{\circ} 30' 33'' = 2' 28''$, $38 + 10''$, $417 = 10^{\circ} 28' 15''$, 037 . Ora, supposte le misure esatte, questi angoli dovrebbero esser uguali; e ciò posto la differenza loro, cioè $1' 59''$, 546 vicinissima a due minuti è una conseguenza del valor inesatto degli angoli.

Agli errori commessi nelle misure degli angoli credette l'autore di poter rimediare coll'usitato espediente di prender un medio fra gli angoli osservati d'altezza e di depressione diminuito però questo dell'angolo al centro; ch'egli suppone $= 2' 30''$: ma non osservò, che nel triangolo ABF , dati i due lati AB , AF , è dato anche l'angolo FAB ; il quale in questo caso sarebbe diversissimo e dall'angolo osservato e dal medio. Infatti il lato AF , il quale pel num. 54 si confonde colla tangente dell'angolo al centro moltiplicata pel raggio, è $= 3267179 \text{ tang. } 2' 30''$. Ma lo stesso lato AF è anche $= AB \cos. FAB$. Da questi due valori nasce dunque l'equazione

$$\cos FAB = \frac{3267179 \text{ tang. } 2' 30''}{2390,55}; \text{ dalla qual si de-}$$

duce $L \cos FAB = 9.9973412$; cui corrisponde l'angolo $6^{\circ} 20'$ minor del medio più che di 4 gradi.

Conchiudiam dunque, che, essendo tutto il calcolo trigonometrico appoggiato all'angolo osservato d'altezza, ed alle lunghezze della visuale e del raggio osculatore, quando l'angolo osservato è troppo incerto, la prudenza vuole, che l'osservazion si rigetti; perchè l'incertezza dell'angolo si spande su

tutti gli elementi e risultati del calcolo.

79. Facciam ora lo stesso esame degli angoli misurati ai due estremi dell'altra visuale $B' C'$. Per aver il valor esattissimo del raggio osculatore del punto B' convien prima determinare di quanto B' sia stato superiore ad A' ; il che s'ottiene per mezzo degli angoli d'altezza e di depressione dei punti medesimi, e del valore di $A' B'$. Ma anche nelle misure di questi angoli sono scorsi alcuni errori; la cui somma passa un minuto e mezzo. Ciò non ostante l'altezza può ancor calcolarsi per approssimazione; e si trova, che B' fu superiore ad A' di tese 3, 4 valor quasi eguale all'assegnato da sir Shuckburg, che lo dice di pie. ing. 22, 18 equivalenti a 3, 469 tese di Francia.

All'estremità B' della base fu dunque CA (fig. 1°) = 3267182 neglimentando 4 decimi di tesa. La visuale AB fu di pie. ing. 14041, 7 = 2195, 9 te. fran.; l'angolo apparente d'altezza EAB non corretto dalla

rifrazione = $11^{\circ} 17' 49''$; e quindi $\frac{B+C}{2} = 39^{\circ} 21' 5'', 5$.

Fatto con questi dati il solito calcolo si giugne al

risultato $\frac{B-C}{2} = 39^{\circ} 18' 49'', 57$; e $C = 2' 15'', 93$.

L'angolo di depressione non corretto dalla rifrazione fu = $11^{\circ} 19' 52''$. Sostituisco i valori di a , d , $\omega = C$ nella formola di rifrazione; e mi risulta

$$r = \frac{11^{\circ} 17' 49'' + 2' 15'', 93 - 11^{\circ} 19' 52''}{2} = 6'', 465$$

Questa rifrazione sembrerà forse a taluno un po' piccola; ma però non è guari diversa da quella, che si troverebbe colla regola del sig. Mayer; ed ecco in qual modo. Abbiain veduto poc' anzi che nel tempo della misura degli angoli il barometro fu a pol. 26, 643; ed il termometro a gradi 18, 6 *R.* A questo grado di calore la rifrazione sarebbe per la detta regola = (0, 05777) *C* se l'altezza del barometro fosse di 28 pol. (vedi il num. 57); ma si riduce a (0, 05497) *C* per l'altezza di 26, 643. Nel caso nostro *C* è = 136"; e questi moltiplicati per 0, 05497 danno 7", 476 rifrazione d'un solo secondo maggior della nostra.

Facendo uso anche in questo caso del valore di $\frac{m}{n}$ medio fra quelli d'Italia e di Francia, ed applicandolo alle circostanze della misura degli angoli avrem di nuovo $\frac{m}{n} = 0, 070266$; ed $\frac{m}{n} C = (0, 070266)$

135", 93 = 9", 54. I veri angoli d'altezza e di depressione dovetter dunque essere 11° 17' 39", 46; ed 11° 17' 45", 61; la cui differenza si riduce a 6", 15. Questa è così piccola, che gli angoli si posson considerar come esatti, o almeno non abbiain motivo di crederli erronei.

Ciò posto si può passare al calcolo dell'altezza; al qual fine si ha $CA = 3267182$; $EAB = 11^{\circ} 17' 49''$; $C = 2' 15''$, 93; e $B = 78^{\circ} 39' 55''$, 07. Con questi dati fassi il calcolo seguente.

$$L \cos E A B = 9 . 99150302$$

$$L C A = 6 . 51417327$$

$$16 . 50567629$$

$$L \sin B = 9 . 9914457294$$

$$L C B = 6 . 5142305606$$

$$C B = 3267612 , 49; \quad D B = 430 , 49.$$

Veggiam ora quanto quest'altezza possa esser alterata dalla rifrazione. Quì sopra abbiain trovato, che questa è = $6'' , 465$. Sarà dunque $E A b = E A B - 6'' , 465 = 11^{\circ} 17' 42'' , 535$; ed $A b C = B + 6'' , 465 = 78^{\circ} 40' 1'' , 535$. Replico il calcolo con questi nuovi valori degli angoli; e n' ho per risultato $L C b = 6 . 5142305606$ valore perfettamente uguale a quello di $L C B$; onde segue, esser in questo caso insensibile l'effetto della rifrazione.

Prendendo un medio fra l'angolo apparente d'altezza e quello di depressione diminuito dell'angolo al centro si troverà $E A b = 11^{\circ} 17' 42'' , 535$; e per conseguente $A b C = 78^{\circ} 40' 1'' , 535$, cioè i valori medesimi trovati pur ora. E quindi si vede, che il calcolo dell'altezza fatto coll'angolo medio conduce agli stessi valori di $C b$, $D b$ posti qui sopra.

Col metodo del num. 53 si determina l'altezza $D B$ per mezzo del triangolo $A B D$, e colla formo-

$$\text{la } D B = A D \frac{\sin (E A B + \frac{\omega}{2})}{\cos (E A B + \omega)}. \quad \text{La corda } A D \text{ è =}$$

$2 \ C A \ sen \ \frac{\omega}{2}$; e, sostituiti i valori di $C A$, $sen \ \frac{\omega}{2}$,

$= 2153, 12$.

L' altezza $D B$ è data dal calcolo seguente.

$$L \ sen \ (E A B + \frac{\omega}{2}) = 9. 29273654$$

$$L A D = 3. 33306827$$

$$12. 62580481$$

$$L \ cos \ (E A B + \omega) = 9. 99144573$$

$$L D B = 2. 63435908 ; D B = 430, 88.$$

Questo risultato supera il precedente calcolato col triangolo $C A B$ di 4 decimi di tesa.

Calcoliamo alfine l' altezza medesima anche per mezzo del triangolo $A B F$. Se vuolsi determinar il valore dell'angolo al centro C supponendo $A F$ uguale alla tangente di C presa in un circolo del raggio

$$C A \text{ si avrà } L \ tang \ C = \frac{A B \ cos \ E A B}{C A} = 6.81894235;$$

cui corrisponde $C = 2' 15'', 946$. Questo valore debb'esser alquanto maggior del vero, com'è in fatti; ma la differenza è di soli 16 millesimi di secondo; poichè il calcolo rigoroso del triangolo $C A B$ ha dato $C = 2' 15'', 93$.

$$\text{Dovendo essere } B d = \frac{A B \ sen \ E A B}{\cos C} \text{ (num. 54)}$$

per determinarne il valore si calcolerà a questo modo

$$L \text{ sen } E A B = 9 . 29202076$$

$$L A B = 3 . 3416126$$

$$12 . 63363336$$

$$L \cos C = 9 . 9999999$$

$$L B d = 2 . 63363346 ; B d = 430 , 163 .$$

Il valore di $d D$ pel num. 54 è dato dal calcolo seguente

$$(120'')^2 : (135 , 93)^2 = 0 . 0000002 : x$$

$$L x = 3 . 4092982$$

$$L C A = 6 . 51417327$$

$$L d D = 9 . 92347147 ; d D = 0 , 838 ; B D = 431 , 001 .$$

Questo risultato supera di 511 millesimi di tesa quello del triangolo $C A B$.

Le differenze dei tre risultati sono assai piccole, e prendendone un medio si potrebbe fissar l'altezza della sommità del *Saleve* sopra l'occhio dell'osservatore all'estremità più elevata della base a tese 430, 79. Supposta l'altezza dell'occhio di cinque piedi o tese 0, 83, l'altezza media sarebbe 431, 62; e sopra l'altra estremità della base (inferiore di 3, 4 te.) di 435, 02. Ma io credo, che il calcolo del triangolo $C A B$ dia le altezze più esatte; e ciò posto m'at-

terrò al risultato del calcolo di quel triangolo, il qual dà per l'altezza di C' sopra l'occhio 430, 49; sopra B' 431, 32; e sopra A' 434, 72.

Il Cavalier Shuckburg, senz'indicare in qual modo abbia calcolata l'altezza di C' sopra B' , dice semplicemente, ch'essa fu di 2806, 27 pie. ing. = 438, 8566 te. fran. maggior del mio risultato alquanto più di te. 7 $\frac{1}{2}$. Ma per aver un'altezza presso a poco eguale alla sua converrebbe supporre l'angolo d'elevazione maggior dell'osservato di 12' 30" allo incirca. Infatti se $\angle A B$ fosse = 11° 30' 20", il calcolo del triangolo $A B F$ darebbe $C = 2' 15''$, 847; $B d = 438$; $d D = 0$, 616; e $D B = 438$, 616 minore dell'altezza assegnata dal calcolator inglese d'un quarto di tesa; ma maggiore alquanto più di mezza tesa aggiungendo al risultato l'altezza dell'occhio sopra B' .

80. Se co' suoi dati, che sono $A B = 2195$, 9; angolo medio d'elevazione = 11° 17' 41", 5; ed $\omega = C = 2' 18''$ egli avesse calcolata l'altezza per mezzo del triangolo $A B F$, avrebbe trovato

$$B d = \frac{2195,9 \operatorname{sen} (11^{\circ} 17' 41'', 5)}{\cos (2' 18'')} = 430, 09 \text{ te. Inoltre,}$$

essendo probabile (come spiegherò qui sotto), ch'egli abbia supposta la sua base distante dal centro della Terra di tese 3269297; egli avrebbe potuto determinar il valore di $d D$ con questo calcolo

$$(120'')^2 : (138'')^2 = 0, 0000002 : x$$

$$Lx = 3 . 4224258$$

$$LCA = 6 . 51445443$$

$$LdD = 9 . 93633023 ;$$

$$dD = 0 , 865 ; DB = 430 , 955 \text{ te.}$$

Questo valore può dirsi eguale a quello, ch' io ho trovato pur ora calcolando nello stesso modo; poichè la differenza loro è di 3 pollici soli.

Ho detto, esser probabile, che il calculator inglese abbia supposta la sua base distante dal centro della terra di te. 3269297; ed eccone la ragione. Sogliono alcuni per soverchio amore di brevità (che soverchio dee dirsi quando sensibilmente pregiudichi all' esattezza) calcolar l' angolo al centro nella seguente maniera. E' suppongono in primo luogo col Picard e col Cassini il raggio terrestre di te. 3269297, e per conseguenza ogni minuto primo della circonferenza di te. 951. Suppongono poi, che l' arco AD misura dell' angolo al centro sia, come debb' essere, alquanto minore della visuale AB , e, diminuita questa di quel numero di tese, che lor sembra più convenevole, la dividon per 951; ed hanno così nel quoziente l' arco intermedio AD espresso in minnti. Che così abbia fatto anche sir Shuckburg io lo congetturo dal valore $2' 18''$ per lui assegnato all' angolo al centro. Imperocchè, se diminniremo d' una dozzina di tese la visuale AB riducendola a 2184; indi la divideremo per 951, ne avremo il quoziente $2' , 296 = 2' 17'' , 76$ valor vicinissimo a quello di Shuckburg;

cui poco importava il tener conto di 24 centesimi di secondo.

Vediam ora a qual risultato ei sarebbe giunto se coi medesimi dati avesse fatto il calcolo per mezzo del triangolo CAB . I dati son questi
 angolo medio d' elevazione $EAB = 11^{\circ} 17' 41''$, 5;
 angolo al centro $C = 2' 18''$; angolo $B = 78^{\circ} 40' 0''$, 5;
 $CA = 3269297$. Il calcolo è dunque il seguente.

$$L \cos EAB = 9 . 99150617$$

$$LCA = 6 . 51445443$$

$$16 . 50596060$$

$$L \sin B = 9 . 99144801$$

$$LCB = 6 . 51451259$$

$$CB = 3269735, 26; DB = 438, 26 \text{ te. (a)}$$

Suppongasi, che il Cavalier Shuckburg abbia così calcolata l'altezza di C' sopra l'occhio, ed aggiunti al risultato 83 centesimi di tesa altezza dell' oc-

(a) Il risultato del triangolo CAB supera quello del triangolo ABF di te. 7, 305; e questa considerabil differenza nasce dal valor troppo grande attribuito all'angolo al centro; il quale influisce pochissimo nel calcolo del secondo triangolo; ma altera assai sensibilmente quello del primo. In fatti, se i calcoli si faranno, non supponendo arbitrariamente un falso valore dell'angolo al centro, ma deducendolo dai dati; che sono $EAB = 11^{\circ} 17' 41''$, 5; $AB = 2195$, 9; $CA = 3269297$; si troverà $C = 2' 15''$, 86 pel triangolo ABF , e $2' 15''$, 83 per CAB : ed i risultati dei due calcoli saranno 430, 817; 431, 42; la cui differenza passa di poco una mezza tesa.

chio sopra B' , vedrassi che l'altezza di C' sopra B' gli sarà riuscita di te. 439, 09 quasi precisamente uguale a quella, ch'egli ha assegnata.

Ma i dati, ai quali il calcolo è appoggiato, sono, come ho già detto, contraddittorii. In fatti per la supposizione, che l'angolo al centro sia $2' 18''$ il logaritmo della sua tangente è 6.8254540, ed a questo aggiunto il logaritmo di $CA=6.51445443$ si ha il logaritmo di $Ad=3.33990843$; cui corrisponde il numero 2187, 3. Ma per la supposizione dell'angolo $EAB = 11^\circ 17' 41'', 5$; il valore di $AF=AB \cos EAB$ è $= 2153, 37$: vale a dire, che Ad in luogo d'esser minore di AF , come necessariamente dev'essere, è anzi maggiore di quasi 34 tese. Manifesta cosa è dunque, che nei calcoli conducenti a quest'assurdo è contenuta qualche contraddizione. Ed essa ci è di fatti; poichè, essendo $AB = 2195, 9$, se supponsi $EAB = 11^\circ 17' 41'', 5$, l'angolo al centro debb'essere alquanto minore di $2' 15'', 9$; ma, supponendolo $= 2' 18''$, l'angolo EAB vien ad essere $= 5^\circ 4' 22''$ non $11^\circ 17' 41'', 5$. E tutte le contraddizioni nascono dalla falsa supposizione; che l'arco intermedio AD sia minore della visuale AB non più che d'una dozzina di tese laddove io con un calcolo esatto l'ho trovato minore quasi di 43. Ed invero, diminuendo di 43 tese il valor di AB ; il che lo riduce a 2153; poi dividendo questo numero per 951, si trova il quoto di minuti $2, 264 = 2' 15'', 34$ non $2' 18''$.

Conchiudiam finalmente, essere da' miei calcoli posto fuor d'ogni dubbio, che l'altezza di C' sopra B' assegnata dal calcolator inglese supera la vera al-

meno di tese $7\frac{1}{2}$; ed aggiungiamo, che le precedenti osservazioni indicano, per quanto a noi pare, d'onde possa esser nato il suo sbaglio.

Ho detto alla fine del num. 78, che quando l'angolo osservato d'altezza è molto incerto, la prudenza vuole, che l'osservazione si rigetti: ma l'ho detto supponendo, che nella misura delle altezze non vogliano tollerarsi gli errori, che giungano ad una tesa o la passino. Ma, se non cureremo un errore di poco maggior d'una tesa, potremo calcolar l'altezza di C' sopra A' anche coll'osservazione fatta in A' . In essa l'angolo dell'elevazione apparente fu $10^{\circ} 30' 25''$; $CA = 3267179$; l'angolo al centro, come già ho mostrato $= 2' 23'' , 37$; e per conseguente $B = 79^{\circ} 27' 6'' , 63$. Il calcolo dell'altezza si farà dunque così

$$L \cos EAB = 9 . 99265635$$

$$LCA = 6 . 5141727$$

$$16 . 50682905$$

$$L \sin B = 9 . 9925982857$$

$$LCB = 6 . 5142307643$$

$$CB = 3267614 , 02; DB = 435 , 02.$$

Tal sarebbe l'altezza di C' sopra l'occhio. Si aggiungano $0 , 83$; e l'altezza di C' sopra A' sarà di tese $435 , 85$; la qual supera quella, che si è dedotta dall'osservazione fatta in B di $1 , 16$ te. Chi volesse prender un medio fra questi due risultati lo tro-

verebbe di 435 , 285 te.; ma correggendo per tal modo il risultato d'un'osservazione probabilmente buona per quello d'un'altra certamente meno esatta, egli sempre più si allontanerebbe dal vero.

Il Cav. Shuckburg dice, esser C' superiore ad A' di pie. ing. 2835,07 corrispondenti a te. fran. 443,36. Il risultato del suo calcolo supera dunque quello del mio di te. 7 , 51. Secondo lui l'angolo al centro fu in quest'osservazione $= 2' 30''$; il che mi fa credere, ch'egli abbia supposto l'arco AD di 13 te. minor della visuale $AB=2390,55$. In fatti, dividendo 2377 per 951 si trova il quoziente $2', 5'$. Anche in questo caso, s'egli avesse co'suoi dati calcolata l'altezza per mezzo del triangolo ABF , l'avrebbe trovata sensibilmente minore. I suoi dati sono $CA=3269297$. $AB=2390,55$: l'angolo medio d'altezza $= 10^\circ 29' 14''$; e l'angolo al centro $C=2' 30''$; dai quali risulta

$$Bd = \frac{2390,55 \cdot \sin(10^\circ 29' 14'')}{\cos(2' 30'')} = 435,12 \text{ te. Per mez-}$$

zo dell'analogia $(120'')^2 : (150'')^2 = 0,0000002 : x$ si ottiene $Lx=3,4948502$; e $LdD=Lx+LCA=0,0093046$; cui corrisponde $dD=1,02$. L'altezza $DB=Bd+dD$ è dunque $= 435,12 + 1,02 = 436,14$, non 443,36: per lo che la differenza è di te. 6 , 29.

Che se egli avesse calcolato col triangolo CAB , lo avrebbe fatto nel modo seguente, avvertendo, che l'angolo B è $= 79^\circ 28' 16''$

$$L \cos E A B = 9 . 99268404$$

$$L C A = 6 . 51445443$$

$$16 . 50713847$$

$$L \sin B = 9 . 99262544$$

$$L C B = 6 . 51451303$$

$$C B = 3269738 , 57; D B = 441 , 57 \text{ te.}$$

S' egli avesse aggiunto l'accrescimento di o , 83 l'altezza di C' sopra A' risulterebbe dunque di te. 442 , 4 minore dell'assegnata dal calcolator inglese di 96 centesimi di tesa. Checchè ne sia, avendo egli supposto l'angolo al centro maggior del vero, non è da stupire, che sia stato condotto ad un'altezza troppo grande, e di te. $7 \frac{1}{2}$ maggior della mia.

Conchiudiam finalmente che, dovendo a quest'osservazione preferirsi quella dell'altro estremo della base B' , la vera altezza di C' sopra A' è probabilmente di te. 434 , 72.

Io ho già detto; che le tre osservazioni barometriche fatte dal fisico inglese e calcolate colla regola del sig. De Luc danno per l'altezza di C' sopra A' te. 434 , 36 minore della precedente di 36 centesimi, ossia d'un terzo di tesa: cosicchè il difetto della regola è in questo caso di 8 diecimillesimi dell'altezza geometrica. Ma ben diversa è la conchiusione del Cav. Shuckburg, il quale ingannato da' suoi calcoli delle altezze geometriche assicura, che il difetto della regola è di 231 per diecimila, cioè quasi di $2 \frac{1}{5}$ per 100. Ma io non so come l'autor medesimo non.

abbia dubitato d'una siffatta asserzione quando scrisse la nota della pag. 532 del sopra citato volume delle Transazioni filosofiche. „ Il risultato medio, dic'egli, di tre osservazioni da me fatte e l'una dall'altra indipendenti sull'altezza della sommità del *Saleve* sopra il lago di Ginevra s'accordano col risultato medio delle due misure prese dal sig. De Luc col livello e col quadrante, dal qual differiscono meno di un piede „.

Ora questo accordo è in una manifesta contraddizione col supposto difetto della regola del fisico di Ginevra. Imperciocchè la media delle due indicate misure di quest'ultimo fa la cima del *Saleve* superiore alla sua stazion inferiore o base di tutte le osservazioni barometriche di piedi 2931, come si vede al par. 513 delle sue Ricerche. Leggesi in oltre al par. 648, che la base fu più alta dell'appartamento dell'autore circa 94 piedi, e l'appartamento superiore al lago d'altri 50. L'altezza della base sopra il lago fu dunque di piedi 144, i quali aggiunti agli altri 2931 fanno ascendere l'altezza della cima del monte sopra il lago a piedi 3075; e quest'altezza s'accorda, come dice sir Shuckburg, colla sua misura a meno d'un piede di differenza. Ma ciò come può essere se la regola del sig. De Luc dà le altezze minori di 231 diecimillesimi? Le undici osservazioni della stazion XV, cioè della sommità del monte calcolate con questa regola danno un'altezza media di 2925 pie.; e questa coll'accrescimento, che dovrebbe farsi per supplire al difetto della regola di $\frac{231}{10000}$ salirebbe

a 2992 , 57. S' aggiungano pie. 144, de' quali la base è superiore al lago; e ne risulteranno 3136 , 57 in luogo di 3075. La regola con quest'accrescimento peccerebbe dunque in eccesso di piedi 61 , 57. All'opposto l'altezza calcolata colla regola senz' alcun cambiamento è di pie. $2925 + 144 = 3069$ minor della misura del fisico inglese di 5 piedi o 6.

In un luogo superiore di pie. ing. 2 , 8 ad *A'* sir Shuckburg ha fatte 4 altre osservazioni barometriche; le quali calcolate colla regola senza verun accrescimento gli han dato un'altezza di pie. ing. 2753,05 equivalenti a te. fran. 430 , 53. Io ho rifatto il calcolo dopo aver accresciuto di 2 gradi *F.* l'altezza dei termometri distaccati da lui tenuti all'ombra; e son giunto al risultato di te. fran. 432 , 8165. I 2 , 86 pie. ing.; de' quali la stazion più bassa fu superiore ad *A'* corrispondono a 0 , 4473 di te. fran.; onde segue, che per queste osservazioni l'altezza di *C'* sopra *A'* fu di te. fran. 433 , 2638. Il medio fra questo risultato e quello delle altre 3 osservazioni è 433 , 81 minore dell'altezza geometrica di 91 centesimi di tesa o pie. fran. 5 , 46; per la qual tenue differenza non credo debba farsi alla regola alcun cambiamento. In fatti nel gran numero delle osservazioni; dalle quali il sig. De Luc ha dedotta la sua regola molte sen trovano; per le quali la differenza tra il risultato barometrico e quel della livellazione è assai maggiore di questa. E si aggiunga, che, se nel calcolo io avessi avuto riguardo alla diversa pressione atmosferica, colla quale son graduati i termometri a Londra ed a Ginevra, avrei trovata un'altezza alquanto mag-

giore, ed una differenza più piccola di tre o quattro decimi di tesa; il che la ridurrebbe a poco più di 3 piedi.

81. Il Cav. Shuckburg non contento del suo primo risultato al *Saleve* volle esaminar la regola anche al *Mole* altro monte non guari distante da Ginevra. Quivi egli determinò geometricamente l'altezza della sommità del monte sopra il punto inferior d'una base misurata a tal uopo; e fece sei osservazioni barometriche, che calcolò colla regola del sig. De Luc. I risultati delle due misure furono secondo lui di pie. ing: 4212 , 4 per la geometrica, e di 4121 , 14 per la barometrica: cosicchè la differenza è di 92 , 26 pie. L'error della regola sarebbe dunque di 0 , 0224 in difetto quasi eguale a quel, che gli diede il calcolo delle sue osservazioni al *Saleve*.

Ma se i dati, dai quali dipende la misura geometrica fossero esatti, io trovo, che la regola peccherebbe in eccesso non in difetto; e che l'errore passerebbe il cinque per cento. Affin di metter il lettore in istato di giudicarne io debbo in primo luogo esporre le osservazioni del fisico inglese; poi calcolar rigorosamente le altezze, che ne dipendono, e per levare ogni dubbio dare i miei calcoli per esteso.

Sir Shuckburg dice, che con replicate misure determinò la lunghezza d'una base $A'B'$ in pie. ing. 1250 , 325; ed aggiunge che, calcolate le visuali per mezzo di questa e degli angoli $A' = 95^{\circ} 37' 28''$; $B' = 77^{\circ} 48' 53''$; $C' = 6^{\circ} 33' 49''$, trovò le visuali $A'C' = 10691 , 9$ pie. ing.; e $B'C' = 10886 , 7$. Verificati i calcoli trovo anch'io; che questi valori delle visuali son giusti. Ben è vero, che la somma dei tre angoli

supera i due retti di 10 secondi; e che ciascuno dovrebbe esser diminuito di $3''$, 33; ma le lunghezze delle visuali non sarebber da questa correzione cangiate sensibilmente. Ora riducendo le misure inglesi alle antiche francesi ne risulta $A' B' = 195$, 53 te.; $A' C' = 1672$, 05; e $B' C' = 1702$, 51.

Per determinar l'altezza della base sopra il livello del mare abbiamo i dati seguenti. La sommità del monte, per ciò che ne dice l'autore, è superiore al Lemano di pie. ing. 4885; ed alla sua base di 4211, 3. L'altezza della base sopra il lago è dunque di pie. ing. 673, 7 corrispondenti a 105, 35 te. fran. Se quest'altezza non è esatta, com'io ho ragion di credere, essa è di poche diecine di tese lontana dal vero; e non può per conseguente introdurre nel calcolo delle altezze alcun sensibile errore. Giusta il De Luc l'altezza del lago sopra il mare è di te. 187, 67. Quella della base sopra il mare fu dunque di te. 293, 02, o a questo numero ben vicina. Ora una tale altezza aggiunta al raggio osculatore della latitudine di Ginevra dà pel valor di CA (fig. I^a) tese 3267207, 31; o per maggior semplicità 3267207.

L'autor non ha dato per queste osservazioni come per quelle del *Saleve* tutti gli angoli d'altezza e di depressione; ma ha detto soltanto, che gli angoli medii d'elevazione furono

per C' sopra $A' = 21^{\circ} 29' 34''$

per C' sopra $B' = 21^{\circ} 3' 41''$

per B' sopra $A' = 0^{\circ} 47' 24''$.

Quest'incertezza non ci lascia sapere quanto esatte o difettose siano state le misure degli angoli; e non ci permette di calcolar direttamente gli angoli al centro. Ben è vero, che le lunghezze delle visuali dimostrano per se sole; che gli angoli al centro così per A' come per B' furon minori di due minuti. Imperciocchè, dividendo l'arco AD misura dell'angolo al centro per 9504 cioè pel numero delle tese contenute in un minuto primo del circolo, il cui raggio è di 3267207 te. si trova il valor dell'arco in minuti primi. Ora, supponendo, che l'arco AD (certamente minore della visuale AB) sia eguale alla medesima, avremo l'arco anzidetto per la visuale del punto A' dividendo 1672, 05 per 950, 4; e ci risulterà $= 1', 759$. E dividendo per lo stesso numero 1702, 51 visuale del punto B' troveremo $1', 791$.

Ciò posto la differenza tra la perpendicolare BF , e la vera altezza DB sarà certamente minore di una

tesa; poichè Bd è $= \frac{BF}{\cos C}$; e $bD = (\sec C - 1) CA$.

Ora i due valori di C posti quì sopra, e maggiori del

vero danno $\frac{1}{\cos C} = 1, 0000001$; il che significa, che i

due valori di Bd superan i due di BF d'un diecimilionesimo. E, poichè BF non può, come vedremo, arrivare a 700 te.; le differenze tra Bd , e BF saran minori di sette centomillesimi d'una tesa. Le secanti degli archi minori di due minuti diminuite dell'unità non giungono a due diecimilionesimi; e per

conseguente ($\sec C - 1$) CA non può arrivare a 66 centesimi d'una tesa.

Ma come potrem calcolare i due valori di BF non sapendo esattamente quali siano stati gli angoli d'altezza di C' sopra A' e sopra B' ? Poichè altro non possiam fare ci serviremo degli angoli delle altezze medie dati dall'osservatore; de' quali auch' egli ha fatto uso per misurare l'altezza del monte sopra le due estremità della base.

I dati per calcolar l'altezza di C' sopra A' sono i seguenti. $C = 1', 759$; $AB = 1672, 05$; ed $EAB = 21^\circ 29' 34''$. Abbiám dunque $Bd =$

$$\frac{1672, 05 \operatorname{sen} (21^\circ 29' 34'')}{\cos (1', 759)}; \text{ d' onde viene il calcolo po-}$$

sto qui sotto

$$LAB = 3 . 2232494$$

$$L \operatorname{sen} EAB = 9 . 5639364$$

$$12 . 7871858$$

$$L \cos C = 9 . 9999999$$

$$LBd = 2 . 7871859; Bd = 612, 61.$$

Dunque, poichè dD è $< 0, 66$, il valor vero di BD non giugnerà a $613, 27$ te.

Per calcolar l'altezza di B' sopra A' abbiamo $AB = 195, 53$ te.; $EAB = 47' 24''$; e per conseguente

$$L \text{ sen } EAB = 8 . 1394907$$

$$LAB = 2 . 2912134$$

$$0 . 4307041$$

In questo caso l'angolo al centro è $= \frac{195,53}{950,4} = 0^{\circ} 0', 2$;

cioè di due soli decimi di minuto, o di $12''$: e quindi opera perduta sarebbe il farlo entrare nel calcolo; non essendo nè il coseno nè la secante d' un angolo così piccolo diversi dall' unità. Il logaritmo dell' altezza di B' sopra A' è dunque $0 . 4307041$; ed a questo corrisponde il numero $2,696$ te.

Finalmente i dati per calcolar l' altezza di C' sopra B' sono $AB = 1702,51$ te.; $EAB = 21^{\circ} 3' 41''$; e $C = 1', 791$.

Ciò posto abbiamo

$$L \text{ sen } EAB = 9 . 55553946$$

$$LAB = 3 . 2310897$$

$$12 . 78662916$$

$$L \cos C = 9 . 99999994$$

$$LBd = 2 . 78662922; Bd = 611,83.$$

La secante di $1', 791$ diminuita dell' unità non giunge anch' essa a due diecimilionesimi; e quindi è, che in questo caso eziandio il valor di dD è minore di $0,66$ te. L' altezza di C' sopra B' è dunque

alquanto minore di te. 612, 49. Si aggiunga a questa l'altezza di B' sopra A' , cioè 2,696; e si avrà un'altr' altezza di C' sopra A' alquanto minore di te. 615, 186. La media delle due altezze di C' sopra A' è 614, 228 alquanto maggior del vero. (a)

Ma il Cav. Shuckburg, avendo fatti i suoi calcoli coi dati medesimi è giunto a risultati ben diversi da' miei. Imperocchè egli afferma, che le due altezze di C' sopra A' sono di pie. ing. 4212, 8; e 4212; onde risulta la media 4212, 4. Ora a questa corrispondono 658, 75 antiche te. fran.; cosicchè la sua altezza media supera la mia scrupolosamente calcolata sopra i suoi dati di te. 44,522 sopra 614, 228, cioè un poco più del sette per 100 dell'altezza da me calcolata.

Che il risultato del calculator inglese sia erroneo si dimostra facilmente in questa maniera. Sia l'angolo d'altezza di C' sopra $A' = 23^\circ 12' 16''$ in luogo di $21^\circ 29' 34''$. Torniamo a fare il calcolo col cangiamento solo di questo dato; ed avremo

$$L \text{ sen } E A B = 9 . 59551076$$

$$L A B = 3 . 2232494$$

$$12 . 81876016$$

$$L \cos C = 9 . 9999999$$

$$L B d = 2 . 81876026 ; B d = 658 , 81 .$$

(a) Quando il calcolo si fa coll'angolo medio non si deve tener conto dell'altezza dell'occhio superiore ugualmente alle due estremità della visuale AB ; cosicchè l'angolo medio sarebbe lo stesso se l'occhio fosse situato nelle estremità medesime A e B . Quando l'ho aggiunta ai risultati dei calcoli, che ho attribuiti a sir Shuckburg, io ho dunque supposto, ch'ei siasi ingannato anche in questo.

Essendo $Dd < 0,66$, sarà anche l'altezza di C' sopra A' alquanto minore di 659, 47. Ma l'altezza media di sir Shuckburg è 658, 75 minor della precedente di sette decimi soli di tesa. Dunque, affinchè il suo risultato fosse esatto, l'altezza angolare di C' sopra A' dovrebb' essere stata $23^{\circ} 12' 16''$, cioè maggiore dell'altezza media da lui assegnata di $1^{\circ} 42' 42''$.

Ma per confermare i miei risultati io calcolerò le due altezze di C' sopra A' e B' anche col triangolo CAB senza far cangiamento veruno ai valori delle visuali, e delle altezze medie angolari. Cominciando dall'estremo A' della base ho $AB = 1672,05$;

$$EAB = 21^{\circ} 29' 34''; \frac{B+C}{2} = 34^{\circ} 15' 13''; \text{ e } CA =$$

3267207. Queste premesse conducono a determinar gli angoli B e C nel modo seguente.

$$L \tan \frac{B+C}{2} = 9.83312669$$

$$L(CA - AB) = 6.5139543567$$

$$16.3470810467$$

$$L(CA + AB) = 6.5143988067$$

$$L \tan \frac{B-C}{2} = 9.83268224$$

$$\frac{B-C}{2} = 34^{\circ} 13' 34'', 81; B = 68^{\circ} 28' 47'', 81; \text{ e}$$

$$C = 1' 38'', 19.$$

Qui si vede, che l'angolo al centro è, come debb'essere, minor di quello, che si deduce dalla supposizione erronea dell'arco AD eguale alla visuale AB .

La vera altezza DB si determinerà dunque a questo modo

$$L \cos EAB = 9 . 96869948$$

$$LCA = 6 . 51417663$$

$$16 . 48287611$$

$$L \sin B = 9 . 9686179823$$

$$LCB = 6 . 5142581277$$

$$CB = 3267819,76; DB = 612,76.$$

Col calcolo del triangolo ABF abbiain trovata la medesima altezza alquanto minore di $613,27$. La differenza tra i due risultati non giunge adunque a 51 centesimi di tesa; ma quello del presente calcolo è probabilmente il più esatto.

Per l'estremità B' abbiaino $CA = 3267207 + 2,696 = 3267209,696$; $AB = 1702,51$; $EAB = 21^\circ$

$$3' 41''; \text{ e } \frac{B+C}{2} = 34^\circ 28' 9'', 5.$$

Fatto con questi dati il calcolo degli angoli, si trova $\frac{B-C}{2} = 34^\circ 26' 29'', 22$; $B = 68^\circ 54' 38'', 72$; e

$$C = 1' 40'', 28.$$

L'altezza DB si determinerà dunque calcolando a questo modo.

$$L \cos E A B = 9 . 96997279$$

$$L C A = 6 . 514177108$$

$$16 . 484149898$$

$$L \sin B = 9 . 9698914632$$

$$L C B = 6 . 5142584348$$

$$C B = 3267822 , 066; D B = 612 , 37.$$

Aggiunte 2 , 696 te. abbiamo una second'altezza di C' sopra $A' = 615 , 066$: e presa la media delle due 613 , 913 minor della media del Cav. Shuckburg di te. 44 , 837; o più semplicemente 45. Se i miei calcoli sono esatti, come ho ragion di credere, il risultato del fisico inglese supera il vero di 45 te. su 614, cioè quasi di $7 \frac{1}{3}$ per 100.

Io credo, che questa differenza de' nostri risultati debba come quella del *Saleve* attribuirsi al metodo, con cui sir Shuckburg può aver fatti i suoi calcoli; ed ecco in qual modo. All'estremità inferior della base la visuale fu di te. 1672 , 05; ed io suppongo, che il calcolatore l'abbia creduta maggiore dell'arco AD d'una dozzina di tese. Ciò posto, per trovar i minuti dell'angolo al centro, supponendo il raggio terrestre = 3269297, egli avrà diviso 1660 per 951; e n'avrà avuto il quoziente $1' , 745 = 1' 44'' , 7$; cui per maggior semplicità avrà sostituito $1' 45''$. I dati per calcolar l'altezza col triangolo CAB son dunque i seguenti. $EAB = 21^{\circ} 29' 34''$; $CA = 3269297$; $eB = 68^{\circ} 28' 41''$. Fatto il calcolo trovo $CB = 3269953$,

23; e $DB = 656, 23$ altezza supposta di C' sopra l'occhio. Aggiunta l'altezza di questo o, 83 ne risulta C' superiore ad A' di te. 657, 06.

Colle stesse supposizioni e con un calcolo simile trovo l'altezza di C' sopra $B' = 654, 21$ te., e sopra $A' = 656, 906$. La media tra questa e la precedente è 656, 983 minor della media del calcolator inglese d'una tesa e $\frac{3}{4}$. Questa piccola differenza può nascere da qualche diversità tra le mie supposizioni dell'angolo al centro, e quelle del Cav. Shuckburg, che ho cercato d'indovinare.

82. Vengo ora alle osservazioni barometriche da lui fatte al punto inferior della base ed alla sommità del monte. Queste furon le seguenti; ma si avverta, che i termometri furon tenuti all'ombra.

I^a

$$A' = 28, 1253 \text{ poll. ing.}; \quad a = 24, 1525$$

$$T = 61^{\circ}, 9 \quad t = 51^{\circ}, 8$$

II^a

$$A' = 28, 1258 \quad a' = 24, 1511$$

$$T = 61^{\circ}, 8 \quad t = 56^{\circ}$$

III^a

$$A' = 28, 1278 \quad a' = 24, 1797$$

$$T = 63^{\circ} \quad t = 56^{\circ}$$

IV^a

$$A' = 28, 1318 \quad a' = 24, 1899$$

$$T = 63^{\circ}, 9 \quad t = 56^{\circ}$$

V^a

$$A' = 28, 1308$$

$$a' = 24, 1913$$

$$T = 64^{\circ}$$

$$t = 57^{\circ}$$

VI^a

$$A' = 28, 1268$$

$$a' = 24, 1941$$

$$T = 64^{\circ}$$

$$t = 57^{\circ}$$

Le altezze medie dei barometri furon dunque $A' = 28, 12805$; $a' = 24, 17643$; e quelle dei termometri $T = 63 \frac{1}{3}$; $t = 55^{\circ} \frac{2}{3}$. Volendo calcolar l'altezza colla regola del sig. De Luc fatta pei termometri esposti al sole, i gradi precedenti si debbon accrescer di 2; e quest'accrescimento li porta a $65 \frac{1}{3}$; $57^{\circ} \frac{2}{3}$. Ora a questi gradi della scala di Far. corrispondon in quella di De Luc $- 4 \frac{2}{3}$; e $- 12 \frac{1}{3}$; la cui somma è $- 17$. Ciò premesso ecco il calcolo dell'altezza.

$$L A' = 1 . 44913967$$

$$L a' = 1 . 38339214$$

$$657, 4753$$

Per la regola del sig. De Luc l'altezza sarà dunque

$$= 657, 4753 - \frac{17}{1000} (657, 4753) = 646, 2983 \text{ te.}$$

La media delle due altezze geometriche di C' sopra A' da me calcolate col triangolo CAB è di te. 613,

913 minore della barometrica di 32,3853. La regola peccherebbe dunque in eccesso di 527 per diecimila, cioè di $5\frac{1}{4}$ per 100 quantità senza dubbio eccessiva.

Ed invero nelle osservazioni delle 15 stazioni di De Luc i massimi errori in eccesso sono i seguenti secondo l'ordine delle stazioni.

0,12; 0,044; 0,031; 0,019; 0,009; 0,009; 0,003; 0,004; 0,001; 0,003; 0,005; 0,007; 0,006; 0,002; 0,002. Qui si vede, che gli errori in eccesso sono assai piccoli fuorchè nelle tre prime stazioni; nelle quali ebbe luogo la circostanza particolare d'uno scoglio verticale scaldato direttamente dal sole. Veggasi il num. 621 delle Ricerche del sig. De Luc; ov'egli ne dà anche la spiegazione. Ma la medesima circostanza non essendosi, per quanto io ne so, verificata in queste osservazioni del monte Mole, io crederei, che la gran differenza tra i risultati delle due misure geometrica e barometrica dovesse attribuirsi a qualche sbaglio occorso nella misura degli angoli d'altezza; o almeno non saprei indovinarne la cagione per altro modo.

83. Nella tavola posta in fine della memoria del Cav. Shuckburg son registrate le misure trigonometriche delle altezze relative di varii monti posti intorno a Ginevra: ed io qui n' esporrò i calcoli dai dati della sua tavola dedotti esattamente; e ne confronterò i risultati con quelli delle osservazioni barometriche calcolate colla regola del fisico di Ginevra.

Saleve e Mole.

La distanza delle due sommità dei monti in pie. ing. fu 79913 , 7 = 12497 , 25 te. fran.

Angolo d'elevazione del Mole sopra il Saleve = $1^{\circ} 2' 6''$

Semisomma degli angoli B e C nel triangolo $CAB = 44^{\circ} 28' 57''$

Altezza del Saleve sopra il Lemano per le livellazioni di De Luc = 511 , 78 te.

Altezza del Lemano sopra il mare 187 , 67

Raggio osculatore per la latitudine di Ginevra 3266914, 29. Dunque la somma = $CA = 3267613 , 74$.

Da questi dati risulta $\frac{B-C}{2} = 44^{\circ} 15' 28'', 05$; e

per conseguente $C = 13', 8'', 95$; e $B = 88^{\circ} 44' 45'', 05$.

Dunque $CB = \frac{3267613, 74 \cos(1^{\circ} 2' 6'')}{\sin(88^{\circ} 44' 45'', 05)} = 3267862, 93$;

e $DB = 249 , 19$ te. altezza sopra l'occhio. A queste aggiungo l'altezza dell'occhio 0 , 83; e mi risulta quella del Mole sopra il Saleve di te. 250 , 02.

Nella tavola di sir Shuckburg quest'altezza è di pie. ing. 1596 = 249 , 59 te. fran. minor della precedente di 43 centesimi di tesa; onde apparisce, non aver lui tenuto conto della rifrazione, che io pure ho nel calcolo precedente neglimentata.

Ora per calcolarne l'effetto suppongo primieramente come al num. 66; che il valore di $\frac{m}{n}$ sia stato

0,081181. Osservo poi, che quando sir Shuckburg andò per la prima volta alla cima del Saleve, egli non prevedeva d'averci a tornare; ond'è assai probabile, ch'egli abbia allora misurati gli angoli d'elevazione o di depressione apparente dei monti; de' quali voleva determinar le altezze relative. L'altezza media del barometro fu allora di pol. fran. 24,113; e quella del termometro 14° R. A questa tempera-

tura il valore di $\frac{m}{n}$ si riduce a 0,075612. Nel luogo

e nel tempo dell'osservazione sarà dunque stato

$$\frac{m}{n} = \frac{24,113 (0,075612)}{28} = 0,065115; \text{ e quindi } \frac{mC}{n} =$$

$$788'',95 (0,065115) = 51'',37.$$

Dunque $EAb = 1^{\circ}1'14'',63$, e $CbA = 88^{\circ}45'36'',42$. Ripetuto con questi angoli il calcolo dell'altezza si trova $Cb = 3267860,09$; e $Db = 246,35$ altezza del Mole sopra l'occhio; cui aggiungendo 0,83 si ha quella del Mole sopra il Saleve = 247,18 te. E quindi l'altezza del Mole sopra il Lemano vien ad essere di tese $247,18 + 511,73 = 758,96$.

Al num. 756 delle Ricerche il sig. De Luc dice; che colla livellazion barometrica trovò la sommità del Mole superiore al Lemano di te. 760. Per un'altra osservazion barometrica fatta dal suo fratello e dal sig. de Saussure calcolata anch'essa colla solita regola l'altezza dello stesso monte sopra il lago fu di 752,83. Il medio dei due risultati è dunque 756,415 minore del geometrico di te. 2,545.

Mole e la Dole.

Essendo il Mole, ove l'osservazione fu fatta, più alto della Dole io calcolerò la depression della Dole colla formola del num. 61, cioè

$$C B = \frac{C A \cos \left(\phi + \frac{m C}{n} \right)}{\cos \left(\phi + \frac{m C}{n} - C \right)} . \text{ (vedi la fig. II.)}$$

Per far il calcolo abbiamo i dati seguenti

Altezza del Mole sopra il lago 758 , 96 te.

Altezza del lago sopra il mare 187 , 67

Raggio osculatore 3266914 , 29

$$C A = 3267860 , 92.$$

Distanza $A b = 146656$ pie. ing. = 22934 , 71 te. fran.

Angolo di depressione $\phi = 25' 13''$.

Da questo valor di ϕ si deduce $\frac{C b A + C}{2} = 45^{\circ} 12' 36'', 5$:

e, fatto il solito calcolo si trova $\frac{C b A - C}{2} = 44^{\circ} 44' 30''$;

e per conseguente $C = 28' 6'' , 5$.

Se si prescinde dalla rifrazione, la formola si ri-

$$\text{duce a } CB = \frac{CA \cos \phi}{\cos(\phi - C)} = \frac{3267860,92 \cos(25' 13'')}{\cos(-2' 53'', 5)} =$$

3267774,45. Sarà dunque $CA - CB = 86,47$ te. depressione apparente della Dole sotto l'occhio; dalla quale sottraendo 0,83 altezza dell'occhio sopra la cima del Mole resta la depression della Dole sotto il Mole di tese 85,64. Questa nella tavola di sir Shuckburg è notata di pie. ing. 562,5 equivalenti ad 87,97 te. fran. Egli è dunque chiaro, aver lui anche in questo caso negligentata la rifrazione; ma il suo calcolo avergli dato te. 2,33 più del mio.

Facciam ora entrar nel calcolo anche la rifrazione, la quale per un angolo al centro maggiore di 28 minuti non può ragionevolmente essere ommessa. Poichè la depression apparente della Dole è di te. 85,64; la depression vera sarà assai vicina alle cento. Io credo adunque, che non mi allontanerò molto dal vero supponendo, che nel tempo, in cui dal Mole si misurò l'angolo di depression della Dole, il barometro ed il termometro avrebber dovuto essere più alti alla Dole che al Mole, il primo d'un mezzo pollice incirca, ed il secondo d'un grado. Ora le altezze medie delle 6 osservazioni fatte sul Mole furono pel barometro di pollici francesi 22,685; e pel termometro gradi 10,5 R. Questi strumenti sarebbero dunque stati sulla Dole a pol. 23,185; e gra. 11,5. Il va-

lore di $\frac{m}{n}$ alla temperatura del ghiaccio è come dian-

zi = 0,081181, e per gra. 11,5 si riduce a 0,0766065

Nelle circostanze dell' osservazione sarà dunque stato

$$\frac{m}{n} = \frac{23,185 (0,0766065)}{28} = 0,063433. \text{ In questo caso}$$

$$\text{essendo } C = 28' 6'', 5; \text{ sarà } \frac{m C}{n} = 1686'', 5 (0,063433)$$

= 106'', 98 = 1' 46'', 98; e ciò posto, la formola diviene

$$C B = \frac{3267860,92 \cos (26' 59'', 98)}{\cos (-1' 6'', 52)} = 3267760,473; \text{ e}$$

$C A - C B = 100,447$ depressione della Dole sotto l'occhio. Ne detraggo 0,83; e mi resta la vera depressione della Dole sotto il Mole di te. 99,617 maggior di quella del calculator inglese di te. 11,647. Sottratte 99,617 da 758,96 te. altezza del Mole sopra il Lemano ne restano 659,343 altezza della Dole sopra il medesimo.

Il sig. De Luc misurò l'altezza del vertice della Dole sopra il lago per mezzo di due osservazioni barometriche. La prima gli diede 3944 pie., e la seconda 3952; la cui media è di 3948 pie. = 658 te. Un'altra osservazion barometrica fatta da lui e dal sig. De Saussure ebbe per risultato 3954 pie.; ma in questa il barometro superiore fu alquanto più basso della vera sommità del monte. Il De Luc dice, che lo fu di poco; ond'io supporrò, che all'altezza precedente debbano aggiugnersi tre altri piedi portandola così a 3957. Aggiunta questa alle altre due, e divisa la somma per tre si trova l'altezza media di 3951 pie. = 658,5 te. minore della misura geometrica di 0,843 di tesa.

Saleve e Buet.

La distanza AB delle due sommità fu di pie. ing. $182446 = 28531, 7$ te. fran. L'angolo d'elevazione EAB (fig. 1^a) $= 1^{\circ} 30' 46''$; $CA = 3267613, 74$; e da

questi dati conchiudesi $\frac{B+C}{2} = 44^{\circ} 14' 37''$; $\frac{B-C}{2} =$

$43^{\circ} 44' 37''$; $C = 30'$; e $B = 87^{\circ} 59' 14''$. Fatto il solito calcolo dell'altezza apparente si trova $CB = 3268491, 115$; e $DB = 877, 375$; e coll'aggiunta di $0, 83 = 878, 205$ altezza del Buet sopra il Saleve. Nella tavola di Shnckburg quest'altezza è di pie. ing. $5615, 6 = 878, 19$ te. fran. cioè quasi eguale alla mia.

Per calcolar l'altezza vera ho $\frac{mC}{n} = 30' (0,065115) =$

$1' 57'', 2$: onde mi viene $EAb = 1^{\circ} 28' 48'', 8$; ed $AbC = 88^{\circ} 1' 11'', 2$. Ripetuto con questi angoli il calcolo, trovo $Cb = 3268474, 99$; e $Db = 861, 25$. Aggiungo $0, 83$; e mi risulta $862, 08$ altezza corretta dalla rifrazione; la qual fu in questo caso di te. $16, 125$.

Aggiunte $511, 78$ te.; delle quali il Saleve è superiore al lago, ne risultano $1373, 86$ altezza vera del Buet sopra il Lemano. Il sig. De Luc per mezzo d'una osservazion barometrica calcolata colla sua regola trovò quest'altezza di te. $1371, 5$ minore della geometrica di $2, 36$.

Saleve e Monbianco.

Distanza $AB = 206869$ pie. ing. $= 32350, 33$ te. fran. angolo d' elevazione $= 2^{\circ} 47' 57''$. Dunque

$$\frac{B+C}{2} = 43^{\circ} 36' 1'', 5; \quad \frac{B-C}{2} = 43^{\circ} 2' 2'', 38; \quad C = 33' 58'', 62; \quad e \quad B = 36^{\circ} 38' 4'', 38.$$

Fatto con questi dati il calcolo senza considerar la rifrazione si giunge a $CB = 3269352, 85$; $DB = 1739, 11$; e col solito accrescimento per l'altezza dell'occhio $1739, 94$.

Il Cav. Shuckburg nella sua tavola fa il Monbianco superiore al Saleve di pie. ing. 11124 corrispondenti a te. fran. $1739, 6$ altezza minor della precedente d'un solo terzo di tesa.

Nelle circostanze delle misure degli angoli alla cima del Saleve ho già osservato, che $\frac{m}{n} \text{ fu} = 0, 065115$.

Qui abbiamo $C = 33' 58'', 62$: onde viene $\frac{m}{n} C = 132'',$

$74 = 2' 12'', 74$. Nell'osservazione fu dunque $EAb = 2^{\circ} 45' 44'', 26$; ed $AbC = 86^{\circ} 40' 17'', 12$. Ripeto il calcolo con questi veri valori degli angoli; e trovo $Cb = 3269331, 93$; $Db = 1718, 19$; ed aggiunta l'altezza dell'occhio $1719, 02$. Questa è dunque l'altezza vera del Monbianco sopra il Saleve; e per conseguenza l'effetto della rifrazione è di te. $20, 92$. L'altezza vera del Monbianco sopra il Lemano sarà dunque $= 1719, 02 + 511, 78 = 2230, 8$.

Mole e Monbianco.

Distanza $AB = 143632$ pie. ing. $= 22461,8$ te. fran. angolo d' elevazione $= 3^{\circ} 37' 7''$: e quindi

$$\frac{B+C}{2} = 43^{\circ} 11' 26'', 5.$$

Alla sommità del Mole ho già mostrato esser $CA = 3267860,92$; ed or conchiudo; che da tutti

questi dati risulta col solito calcolo $\frac{B-C}{2} = 42^{\circ} 27'$

$52'', 2$; $C = 23' 34'', 3$; e $B = 85^{\circ} 59' 18'', 7$.

Ciò premesso, il calcolo del triangolo CAB conduce a $CB = 3269355,697$; e per conseguente a $BD = 1494,777$ altezza apparente del Monbianco sopra l' occhio; e sopra il Mole $1495,607$. Nella tavola di sir Shuckburg quest' altezza è di pie. ing. $9570,6 = 1496,7$ te. fran. maggior della mia di te. $1,093$. Qui pure è manifesto; non aver il calcolatore inglese tenuto conto della rifrazione.

Per calcolar l' effetto anche di questa abbiamo,

come qui sopra ho spiegato, $\frac{m}{n} = 0,081181$ per la

temperatura del ghiaccio; l' altezza del barometro in pollici francesi $= 22,685$; e quella del termometro

$= 10^{\circ}, 5$ R. A questa temperatura il valore di $\frac{m}{n}$ si ri-

duce a 0, 0770042. Quando si misurò l'angolo d'e-

levazione sarà dunque stato $\frac{m}{n} = \frac{22,685 (0,0770042)}{28}$

$= 0,062387$. Or quindi viene $\frac{mC}{n} = 1414'',3(0,062387) =$

$88'',234 = 1'28'',234$. I veri angoli furon dunque $EAb = 3^\circ 35'38'',766$; ed $AbC = 86^\circ 0'46'',934$. Fatto con questi dati il calcolo del triangolo CAb si trova $Cb = 3269345,948$; l'altezza vera sopra l'occhio $Db = 1485,028$; e sopra il Mole $1485,858$. L'effetto della rifrazione fu dunque in questo caso di te. 9, 749.

Essendo il Mole superior al Lemano di te. 758, 96 abbiamo un'altr'altezza del Monbianco sopra quel lago; la qual è di tese 2244, 818. Ho già detto al num. 22; che una misura geometrica del sig. Pictet fa la cima del Monbianco superiore al Lemano di 2238 te. Supposto, com'è verisimile, ch'egli non abbia neglimentata la rifrazione, la media delle tre altezze sarà di te. 2237, 873 quasi eguale a quella del sig. Pictet, perchè anche la media di sir Shuckburg è di 2237, 809.

Ho già detto alla fine del num. 26, che contemporaneamente alle osservazioni del Monbianco e di Ginevra il figlio del sig. De Saussure ne fece un'altra al Priorato di Chamouni. In questa l'altezza corretta del barometro fu di linee 303, 36; e quella del termometro all'ombra di gradi 18, 4 R. Accresciuta d'un grado la temperatura, e fatto il calcolo colla regola di De Luc, trovo l'altezza del barometro del

Monbianco sopra quello di Chamouni di te. 1894,853; e l'altezza del barometro di Chamouni sopra quel di Ginevra di 327,324. La somma delle due altezze è dunque di tese 2222,177 minore di 4,896 di quella, che abbiain trovato al num. 77 calcolando nello stesso modo le osservazioni del Monbianco e di Ginevra. Il medio dei due risultati è 2224,625 te Il barometro di Ginevra fu superiore al lago di te. 13,5; e quel del Monbianco inferiore alla cima di tre piedi. La vera altezza della sommità del monte sopra il lago fu dunque per le osservazioni barometriche calcolate colla regola di De Luc di te. 2238,625 maggior della media geometrica di $\frac{3}{4}$ di tesa, conformità veramente singolare, ma da attribuirsi a qualche accidental compenso di errori più che all'esattezza de' risultati così della regola come delle misure trigonometriche.

Le differenze tra i risultati della regola del sig. De Luc, e le altezze vere delle misure geometriche furon dunque

$$\text{pel Mole } \frac{-2,545}{758,96} = -0,003353$$

$$\text{per la Dole } \frac{-0,843}{659,343} = -0,0012785$$

$$\text{pel Buet } \frac{-2,36}{1373,86} = -0,0017178$$

$$\text{pel Monbianco } \frac{+0,752}{2237,873} = +0,00033603.$$

Tutte queste differenze son così piccole, che non

pure alla regola non s'oppongono; ma può dirsi, che la confermino mirabilmente. E quindi io sempre più mi confermo nell'opinione; che il grand' errore di più del cinque per 100 in eccesso, di cui ho parlato alla fine del num. prec. debba attribuirsi a qualche considerabil errore degli angoli d' elevazione. In fatti, supponendo che questi in luogo di $21^{\circ} 29' 34''$; $21^{\circ} 3' 41''$ sian $22^{\circ} 29' 34''$; $22^{\circ} 3' 41''$, e calcolate le due altezze col triangolo CAB i risultati sono di te. 640, 556; e 643, 2; il cui medio 641, 878 esprime l' altezza del Mole sopra l' occhio dell' osservatore. Aggiungo 0, 83; e viemmi l' altezza sopra il punto inferior della base di te. 642, 708. Essendo il risultato della misura barometrica 646, 3; la differenza loro è dunque di te. 3,592 su 642.708, cioè poco più del mezzo per 100. Se tali fossero stati gli angoli d' elevazione quali io gli ho supposti, la regola del fisico di Ginevra peccherebbe ancora in eccesso, ma poco più del mezzo per 100; ed affinchè la supposizione si verifichi basta, che sia seguito lo sbaglio di leggere o di scrivere un' unità di meno nei gradi degli angoli d' elevazione.

Ma terminiam finalmente questa discussione divenuta oramai troppo lunga, e concludiamo: 1° che tutte le osservazioni barometriche fatte intorno a Ginevra sui monti Mole, la Dole, Buet e Bianco da' signori De Luc, de Saussure, e Senebier calcolate colla regola di De Luc danno risultati che s' accordano assai bene con quelli delle misure trigonometriche corrette, come conviene, dalla rifrazione: 11° che lo stesso è da dire delle osservazioni del

Cav. Shuckburg al monte Saleve; poichè anche queste calcolate colla regola medesima conducono ad un risultato; la cui differenza da quello della misura geometrica calcolata esattamente è di 36 centesimi di tesa in difetto su 434, 72, o di 8 diecimillesimi dell'altezza totale, non già di 231 come alcuni fisici han creduto ingannati dai calcoli erronei del Cav. Shuckburg: III° che le osservazioni barometriche di questo fisico al monte Mole contraddicon sole la regola facendola peccare in eccesso d'oltre al cinque per 100; ma che l'error si riduce a poco più d'un mezzo per 100 se per isbaglio fu scritto un grado di meno negli angoli d'elevazione.

Ma nel seguente articolo si vedrà, che la regola del fisico di Ginevra applicata alle numerose ed esatte osservazioni del General Roy dà le altezze minori delle trigonometriche di 0, 01345 per la temperatura di 10° R. cioè alquanto più di $1 \frac{1}{3}$ per 100. Io l'ho applicata all'osservazione del sig. Ramond al *Pic du midi*, ed a quella del sig. d'Aubuisson al monte Gregorio; ed l'ho trovato, che anche per queste essa pecca in difetto: nella prima di 0, 01668 a 9° $\frac{1}{4}$ R: nella seconda di 0, 012515 ad 11° $\frac{1}{2}$ R. Finalmente i risultati della stessa regola son minori di quelli della formola pubblicata dal sig. Pictet in uno degli ultimi giornali britannici di 0, 01705 a 10° R. La media è 0, 014924, o quasi $1 \frac{1}{2}$ per 100 per la temperatura di circa 10° $\frac{1}{2}$ R. Ma della più precisa quantità di questo difetto, e della causa da cui può dipendere, parlerò altrove più distesamente.

M E M O R I A

*in cui si espone un metodo d'indagare i divisori
di qualsivoglia dato numero.*

DI SEBASTIANO CANTERZANI

presentata a' 20 di febbrajo 1811.

I. Succede in molti problemi di Algebra indeterminata, che la soluzione loro esiga che si trovino i divisori di un dato numero, nè questi divisori trovarsi possano, se non si trovino quei valori di una quantità indeterminata, che fanno riuscir eguale a un numero intero una formola frazionaria data per quella indeterminata; qualora poi si passa a cercare questi tali valori co' metodi, che comunemente si danno per trovarli, si ricada nel bisogno di ritrovare i divisori del numero dato.

II. Uno di tali problemi si è il seguente: *Trovare un numero intero, che posto in luogo di x nella formola $\sqrt{xx \pm A}$, dove A è un numero intero dato, faccia che la formola si converta in un numero razionale.* Senza cercare con quale de' metodi proposti dagli Autori si possa sciorre questo problema, io mi fo a sciorlo nella maniera, che verrò subito esponendo dopo di aver notato, che delle due formole $\sqrt{xx + A}$,
T. II. P. II.

$\sqrt{xx - A}$ ridotta che sia a razionalità l'una viene ad esser ridotta anche l'altra; poichè se $\sqrt{xx + A} = y$, sarà $xx = yy - A$, cioè $x = \sqrt{yy - A}$, e viceversa: or x , e y già si suppongono numeri intieri, e razionali.

III. Sia primieramente A numero pari, e $\sqrt{xx + A}$ la formola da ridurre a razionalità in numeri intieri. La serie dei quadrati dei numeri naturali ha per serie delle prime differenze la serie dei numeri dispari. Preso un numero pari di queste differenze, e sommatele insieme si formerà sempre un numero pari; e se le differenze, che si saran prese, non sieno sparse quà e là nella loro serie, ma sieno consecutive, la loro somma sarà sempre la differenza d'uno dei quadrati della serie de' quadrati da un altro quadrato, e però aggiuntala dei due quadrati al minore si avrà il maggiore. Suppongo dunque che $2h + 1$ sia la minore delle differenze consecutive, che si saranno sommate; la seguente differenza sarà $2h + 3$, e la loro somma $4h + 4$; quella, che vien dopo queste due, sarà $2h + 5$, e la somma delle tre $6h + 9$, e così via discorrendo, di modo che ben si scorge che generalmente se il numero pari di differenze consecutive, che si saran sommate, sia $2f$, la somma loro sarà $4fh + 4ff$. Posto pertanto che il numero pari A sia questa somma, si avrà $4fh + 4ff = A$; dove tosto apparisce, che l'equazione non può sussistere in numeri intieri, se A non sia parimente pari: onde si dee concludere, che la riduzione della formola $\sqrt{xx \pm A}$ a razionalità in numeri intieri, quando A è pari, è impossibile, se A non sia divisibile per 4.

IV. Sia dunque A divisibile per 4. Sostituendo $4B$ ad A l'equazione riesce $hf + ff = B$, che dà

$$h = \frac{B}{f} - f; \text{ e la difficoltà è ridotta a trovare i diviso-}$$

ri del numero B . Per la qual cosa se B è un numero primo, il problema non avrà che una sola soluzione, cioè quella, che si ottiene prendendo $f=1$, la quale non manca mai: se poi B non sia numero primo, quante saranno le maniere diverse di risolverlo in due fattori, tante saranno le altre soluzioni, che il problema avrà; e ciò perchè risoluto che sia B in due fattori, è indifferente valersi dell' uno di essi, o dell' altro, poichè amendue somministrano la stessa soluzione.

Trovato poi il valor di h è trovato insieme quello di x , perchè $x = h$. In fatti se nella formola

$$\sqrt{xx + A} \text{ si metta il valor di } A = 4fh + 4ff \text{ (III)}$$

si ottiene $\sqrt{xx + 4fh + 4ff}$, che non diventa razionale, se non ponendo hh in luogo di xx . Quindi è, che trovato che si sia il valor di f , e ricavato quello di h , sarà $h + 2f$ il razionale, in cui la formola $\sqrt{xx + A}$ si converte.

V. Sia ora A numero dispari, che non sia l'unità [essendo chiara l'impossibilità della riduzione a razionalità in numeri intieri della formola $\sqrt{xx \pm 1}$], e sia $\sqrt{xx - A}$ la formola da ridurre a razionalità in numeri intieri. Per fare il numero A col sommare le differenze prime della serie dei quadrati consecutivamente prese è manifesto doversene prendere un

numero dispari. Chiamata, come prima, $2h + 1$ la più piccola di tali differenze, la somma delle tre prime sarà $6h + 9$, la somma delle prime cinque $10h + 25$, e generalmente se il numero delle differenze, che si sommano, sia $2f + 1$, la loro somma sarà

$2(2f + 1)h + (2f + 1)^2 = (2f + 1)(2h + 2f + 1)$. Faccio dunque $(2f + 1)(2h + 2f + 1) = A$, e subito m' accorgo, che la soluzione del problema esige che si trovino i divisori del numero A . Se in quest'equazione separo h , trovo che facendo $A - 1 = 2B$

riesce $h = \frac{B - 2ff - 2f}{2f + 1} = \frac{B - f}{2f + 1} - f$, e che per conse-

guenza si troveranno i divisori del numero A , se si determinerà f in modo che la formola frazionaria

$\frac{B - f}{2f + 1}$ risulti eguale a un numero intero. Trovato poi

che fosse f , già si sarebbe trovato il fattore del numero A rappresentato da $2f + 1$. Il valore poscia di

x sarebbe $x = \frac{B + f + 1}{2f + 1} + f$. In fatti con questo va-

lor di x si avrebbe $x - h = 2f + 1$, $x + h = \frac{2B + 1}{2f + 1}$,

onde $xx - hh = 2B + 1$: ma $2B + 1 = A$. Dunque $xx - hh = A$, e però $xx - A = hh$, e quindi $\sqrt{xx - A} = h$, cioè la formola proposta ridotta a razionalità in numeri interi. Dove vedesi, che trovato il valor di h è già trovato il razionale, in cui la proposta formola si converte.

VI. Ora è chiaro che $f = 0$ rende la formola

$\frac{B-f}{2f+1}$ eguale all'intero B . Per la qual cosa egli è

certo, che il problema ha sempre almeno una soluzione: ma oltre questa ne avrà altre, se il numero A oltre l'unità avrà altri fattori, e tante ne avrà, quanti saranno i modi diversi di risolvere A in due fattori.

VII. Se a trovare i fattori, o dir vogliamo i divisori del numero A prendo a cercare i numeri, che

posti in luogo di f rendono la formola $\frac{B-f}{2f+1}$ egua-

le a un intero, e a quest'effetto metto $B-f=m$, e $1+2f=n$ (che è forse l'unico metodo, onde ottenere in numeri intieri la risoluzione dell'equazione

$z = \frac{B-f}{2f+1}$) ed eliminato f dalle due equazioni ri-

cavo l'equazione $2B-2m=n-1$, e quindi $2B+1$,

cioè $A = 2m+n$, non posso rinvenire $\frac{m}{n}$, che rap-

presenta la formola $\frac{B-f}{2f+1}$, la quale dev' essere un

intero, senza aver $\frac{A}{2n} - \frac{1}{2} = \frac{m}{n}$, cioè senza esser da ca-

po, e dover trovare i divisori del numero A , i quali dovendo essere numeri dispari, perchè dispari è A ,

faranno che $\frac{A}{2n}$ riesca della forma $\frac{2b+1}{2}$, così che

$\frac{2b+1}{2} - \frac{1}{2}$ sia appunto $= b$ numero intero. Da ciò

apparisce, che il problema: *Dato il numero intero dispari A trovare quei numeri interi, che posti in luogo di x nella formola $\sqrt{xx - A}$ rendono questa formola razionale*, è uno di quei, che ho accennati da principio (I). Poichè alla di lui soluzione si richiede, che si trovino i divisori del numero A , e a trovare questi divisori convien determinare f in modo che la

formola $\frac{B-f}{2f+1}$ riesca eguale a un intero; qualora poi

mi accingo a determinare f ritorno alla necessità di ritrovare i divisori del numero A .

VIII. Pare adunque, che il problema: *Dato il numero dispari A , che non cominci per 5, trovare se sia, o no numero primo, e se no trovarne i fattori*, ove per sciorlo non s'abbia in pronto la tavola, o il numero A sia al di sopra di quelli, ai quali la tavola si estende, non possa sciorsi se non tentando. In tal caso non sarà inutile l'avere qualche scorta, onde regolare il tentativo. Finora tra le diverse strade, per cui mi sono incamminato verso la soluzione di questo problema, la meno tortuosa e scomoda mi è riuscita quella, che in seguito verrò additando. Prima convien notare le seguenti cose.

Se il numero A sia risolvibile in due fattori diseguali, egli è evidente, che uno di essi sarà sempre

minore, e l'altro maggiore della radice del più gran quadrato contenuto in A .

Se la figura iniziale del numero A sia 1, l'uno dei supposti due fattori avrà per figura iniziale 7, e l'altro 3, o avranno amendue per figura iniziale 1, oppure 9.

Se la figura iniziale del numero A sia 3, l'uno dei supposti due fattori avrà per figura iniziale 3, e l'altro 1, oppure l'uno 9, e l'altro 7.

Se la figura iniziale del numero A sia 7, l'uno dei supposti due fattori avrà per figura iniziale 7, e l'altro 1, oppure l'uno 9, e l'altro 3.

Finalmente se la figura iniziale del numero A sia 9, l'uno dei supposti due fattori avrà per figura iniziale 9, e l'altro 1, o avranno amendue per figura iniziale 7, oppure 3.

IX. Siccome l'ordine da tenersi nella serie delle operazioni, che occorreranno, è sempre il medesimo, o cominci A per 1, o cominci per 3, o per 7, o per 9, così mi limito a indicarle in un caso solo. Sia dunque $A = 3200011$. Se questo numero possa risolversi in due fattori, egli è certo, che dovrà verificarsi una delle tre equazioni

$$(10m + 7)(10n + 3) = 3200011$$

$$(10m + 1)(10n + 1) = 3200011$$

$$(10m + 9)(10n + 9) = 3200011$$

Nella prima, che ha i due fattori di diversa forma, separo l'una, e l'altra indeterminata, perchè non si sa a quale delle due forme sia riferibile il fattor

minore: nelle altre due equazioni, ciascuna delle quali ha i due fattori della stessa forma, basta separar una sola delle due indeterminate. Si ricavano quindi quattro formole frazionarie

$$\frac{319999 - 7n}{10n + 3} = m, \quad \frac{319999 - 3m}{10m + 7} = n$$

$$\frac{320001 - n}{10n + 1} = m$$

$$\frac{319993 - 9n}{10n + 9} = m$$

in ognuna delle quali il denominatore rappresenta uno dei supposti due fattori, il minor de' quali deve esser minore di 1788 radice del più gran quadrato contenuto nel numero 3200011, e però dovrà essere $10n + 3$, come pure $10m + 7$, e $10n + 1$, e $10n + 9 < 1788$, cioè n , come anche m non maggiore di 178. Dovrebbersi per tanto in ciascuna delle quattro formole provare in luogo dell'indeterminata uno dopo l'altro tutti i numeri cominciando da 0 fino a 178 per vedere se alcuna di esse si converta in numero intiero. Ma questo sarebbe forse un lavoro alquanto molesto.

Mi limito perciò a provare solamente 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, e trovo, che nissuna formola riesce eguale a un intiero. Così mi sono assicurato, che se il numero proposto si può risolvere in due fattori, il minore di essi non è esprimibile per meno di tre figure. Passo dunque a vedere, se può esservi un fattore, che si esprima con tre figure; cioè dalle quat-

tro formole precedenti, che possono chiamarsi le prime, passo alle seconde, che si trovano nella seguente maniera.

Al 7, per cui si suppone che possa cominciare uno dei due fattori, scrivo appresso, cioè in secondo posto, una dopo l'altra le dieci figure aritmetiche, come si vede in M , e scrittele pure appresso 3, per cui dovrebbe cominciare l'altro fattore, noto in N dirimpetto a ciascun numero scritto in M quello di questi altri numeri, che moltiplicato pel suo corrispondente scritto in M produce un numero, che comincia per 11, come per 11 comincia il numero proposto. E' facile trovar l'accoppiamento di questi numeri, poichè trovatolo per li primi due, o tre si scorre subito l'ordine, col quale si seguono l'un l'altro i numeri scritti in N : in questo caso il seguente si ottiene aggiungendo 10 al precedente, e trascurando nella somma la terza figura, dove la somma la porti. Con queste dieci coppie di numeri formo i dieci prodotti, a ciascun de' quali metto eguale il numero proposto.

$M \dots N$

$$07 \dots 73 (100m + 7)(100n + 73) = 3200011$$

$$17 \dots 83 (100m + 17)(100n + 83) = 3200011$$

$$27 \dots 93 (100m + 27)(100n + 93) = 3200011$$

$$37 \dots 03 (100m + 37)(100n + 3) = 3200011$$

$$47 \dots 13 (100m + 47)(100n + 13) = 3200011$$

$$57 \dots 23 (100m + 57)(100n + 23) = 3200011$$

$T. II. P. II.$

57

$$67 \dots 33 (100m + 67)(100n + 33) = 3200011$$

$$77 \dots 43 (100m + 77)(100n + 43) = 3200011$$

$$87 \dots 53 (100m + 87)(100n + 53) = 3200011$$

$$97 \dots 63 (100m + 97)(100n + 63) = 3200011$$

Lo stesso faccio per riguardo ai due fattori, che si suppone che possano cominciare amendue per 1. Se non che avendo questi due fattori la stessa forma, i prodotti saranno meno di dieci, e nel nostro caso solamente cinque: e cinque saranno pure quei, che soggiungerò per riguardo ai due fattori, che si suppongono cominciare per 9. Anche negli accoppiamenti tanto dei numeri, che cominciano per 1, quanto dei numeri, che cominciano per 9, regna un ordine; poichè ne' primi la somma dei due accoppiati comincia costantemente per 12, e nei secondi per 88, come mostrano le parentesi in X , e in Y .

X	Y
01	09
11	19
21	29
31	39
41	49
51	59
61	69
71	79
81	89
91	99

$$\begin{aligned}
 & (100m + 1)(100n + 11) = 3200011 \\
 & (100m + 21)(100n + 91) = 3200011 \\
 & (100m + 31)(100n + 81) = 3200011 \\
 & (100m + 41)(100n + 71) = 3200011 \\
 & (100m + 51)(100n + 61) = 3200011 \\
 & (100m + 9)(100n + 79) = 3200011 \\
 & (100m + 19)(100n + 69) = 3200011 \\
 & (100m + 29)(100n + 59) = 3200011 \\
 & (100m + 39)(100n + 49) = 3200011 \\
 & (100m + 89)(100n + 99) = 3200011
 \end{aligned}$$

Separo amendue le indeterminate in ognuna delle venti equazioni, e ottengo venti coppie di formole frazionarie, cioè

1. $\frac{31995 - 7n}{100n + 73} = m, \quad \frac{31995 - 73m}{100m + 7} = n$
2. $\frac{31986 - 17n}{100n + 83} = m, \quad \frac{31986 - 83m}{100m + 17} = n$
3. $\frac{31975 - 27n}{100n + 93} = m, \quad \frac{31975 - 93m}{100m + 27} = n$
4. $\frac{31999 - 37n}{100n + 3} = m, \quad \frac{31999 - 3m}{100m + 37} = n$
5. $\frac{31994 - 47n}{100n + 13} = m, \quad \frac{31994 - 13m}{100m + 47} = n$
6. $\frac{31987 - 57n}{100n + 23} = m, \quad \frac{31987 - 23m}{100m + 57} = n$
7. $\frac{31978 - 67n}{100n + 33} = m, \quad \frac{31978 - 33m}{100m + 67} = n$
8. $\frac{31967 - 77n}{100n + 43} = m, \quad \frac{31967 - 43m}{100m + 77} = n$
9. $\frac{31954 - 87n}{100n + 53} = m, \quad \frac{31954 - 53m}{100m + 87} = n$
10. $\frac{31939 - 97n}{100n + 63} = m, \quad \frac{31939 - 63m}{100m + 97} = n$
11. $\frac{32000 - n}{100n + 11} = m, \quad \frac{32000 - 11m}{100m + 1} = n$
12. $\frac{31981 - 21n}{100n + 91} = m, \quad \frac{31981 - 91m}{100m + 21} = n$

$$13. \frac{31975 - 31 n}{100 n + 81} = m, \quad \frac{31975 - 81 m}{100 m + 31} = n$$

$$14. \frac{31971 - 41 n}{100 n + 71} = m, \quad \frac{31971 - 71 m}{100 m + 41} = n$$

$$15. \frac{31969 - 51 n}{100 n + 61} = m, \quad \frac{31969 - 61 m}{100 m + 51} = n$$

$$16. \frac{31993 - 9 n}{100 n + 79} = m, \quad \frac{31993 - 79 m}{100 m + 9} = n$$

$$17. \frac{31987 - 19 n}{100 n + 69} = m, \quad \frac{31987 - 69 m}{100 m + 19} = n$$

$$18. \frac{31983 - 29 n}{100 n + 59} = m, \quad \frac{31983 - 59 m}{100 m + 29} = n$$

$$19. \frac{31981 - 39 n}{100 n + 49} = m, \quad \frac{31981 - 49 m}{100 m + 39} = n$$

$$20. \frac{31912 - 89 n}{100 n + 99} = m, \quad \frac{31912 - 99 m}{100 m + 89} = n$$

In ciascheduna di queste formole frazionarie in luogo dell' indeterminata provo una dopo l' altra le nove figure aritmetiche significanti (è inutile provare il zero, perchè si è già veduto che il numero proposto non ha nissun fattore espresso per meno di tre figure). Ma solamente giunto alla decimaquinta coppia trovo, che al mettere 7 in luogo di m nella se-

conda formola ottengo $\frac{31542}{751} = 42 = n$. Dunque un

fattore del numero proposto 3200011 è 751: l' altro sarà $100 n + 61$, cioè $100 \cdot 42 + 61 = 4261$, il qua-

le sarà certamente numero primo, perchè la radice del più gran quadrato in esso contenuto non ha che due figure, e però il minore dei due fattori, in cui fosse esso risolvibile, non potrebbe aver più di due figure; or se vi fosse un tal fattore, siccome dovrebbe egli esser comune anche al numero proposto, così si sarebbe già trovato mediante le quattro formole prime. Essendo per tanto e il fattor minore 751, e il maggiore 4261 numero primo, egli è certo, che il proposto numero oltre questi due non può avere altri fattori.

X. Quando il numero proposto sia espresso per un numero grande di figure, converrà tante volte dalle seconde formole passar alle terze, e fors' anche dalle terze alle quarte, ec.; il qual passaggio si fa sempre alla maniera stessa, nella quale si è veduto, che dalle prime si passa alle seconde. Egli è vero che in questo modo il numero delle formole, in cui si ha da operare, cresce grandemente, massime se per avventura il proposto numero sia numero primo. Ma non è piccolo vantaggio quello di non dover mai tentare in luogo delle indeterminate che i numeri scritti con una sola figura.

Ciò che può maggiormente rincrescere in questa specie di operazioni, è la divisione, che a formola per formola convien fare per vedere se si faccia, o no senza avanzo. Ma appunto perchè altro non si cerca se non di conoscere se la divisione si ottenga con avanzo, o senza, si agevolerà molto quest' operazione (giacchè il divisore è sempre dispari) facendo la divisione a rovescio, cioè non da sinistra verso la

destra, come ordinariamente si pratica, ma da destra verso la sinistra; la qual operazione riesce speditissima non avendosi a far altro che sottrarre successivamente i multipli del divisore dal dividendo, e dai diversi avanzi, che di mano in mano si ottengono, trascurando in questi il zero, che sempre risulta a destra, finchè si giunga ad avere per avanzo zero, o un numero minore del divisore, o del multiplo, che dovrebbe sottrarsi. In questo secondo caso è certo, che la divisione non ha luogo senza avanzo: nel primo caso è chiaro, che si è ottenuto un quoziente intero, il quale è il numero formato di quelle figure scritte una dietro l'altra da destra verso la sinistra, per le quali si è successivamente moltiplicato il divisore per averne il conveniente multiplo, cioè quel multiplo, la cui prima figura è quella stessa, che è prima nel dividendo, o nell'avanzo, da cui dovette sottrarsi: dove è da avvertire, che se in alcuno degli avanzi, che han preceduto l'avanzo zero, sia risultato a destra più di un zero, allora bisogna nel quoziente porre tanti zeri, quanti ne sono in quell'avanzo oltre il primo, i quali stiano in luogo di quelle figure significanti, che sarebber venute nel quoziente, se in vece dei zeri, che nell'avanzo si trovano oltre il primo, vi fossero state altrettante figure significanti. Altre avvertenze pratiche, che sul fatto non isfuggono mai all'esperto calcolatore, possono scemar non poco la gran mole d'operazioni, che a prima vista si presentano alla mente come necessarie ad ottenere l'intento.

XI. A buon conto tutte le volte che chi calcola

s' accorge, che il denominatore d'una formola riesce un numero composto, cioè non primo, egli deve trascurarlo, e non fare la divisione; poichè rappresentando sempre (IX) il denominatore uno dei supposti fattori del numero proposto, non può esso esser composto, giacchè se potesse esser numero composto, i suoi fattori, che dovrebbero essere anche fattori del numero proposto, si sarebber già trovati nelle formole precedenti; or non essendosi trovati, è evidente, che non debbono aver luogo. Questa riflessione risparmia un numero ben grande di operazioni.

Trattandosi di un metodo, che nella pratica ammette dei compendj, gioverà soggiungere qualche esempio.

XII. Sia il numero $2^{2^5} + 1 = 4294967297$, che secondo un teorema di Fermat avrebbe dovuto esser numero primo, ma dal celebre Leonardo Euler fu poscia accidentalmente scoperto esser benissimo numero composto.

I due prodotti $(10m + 1)(10n + 7)$, $(10m + 3)(10n + 9)$ eguagliati al numero proposto somministrano le quattro formole prime

$$\frac{429496729 - n}{10n + 7} = m, \quad \frac{429496729 - 7m}{10m + 1} = n$$

$$\frac{429496727 - 3n}{10n + 9} = m, \quad \frac{429496727 - 9m}{10m + 3} = n$$

nissuna delle quali al mettervi in luogo dell' indeterminata una dopo l'altra le dieci figure aritmetiche 0, 1, 2 9 si converte in numero intiero. Dun-

que il minore dei due supposti fattori non può essere scritto con meno di tre figure. Perciò passo alle formole seconde: cioè dietro al 7, per cui può cominciare l'uno dei due fattori, scrivo in M le dieci figure aritmetiche, e le scrivo pure dietro 1, per cui dee cominciar l'altro, e accoppio in N a ciascun dei primi numeri quello di questi secondi, che moltiplicato pel suo corrispondente dà un prodotto, che comincia per 97, come per 97 comincia il numero proposto. Lo stesso faccio in P , e in Q per riguardo ai due fattori, uno de' quali cominci per 9, e l'altro per 3. Se si aggiunge 70 al precedente dei numeri N , e 30 al precedente dei numeri Q , si ha il seguente tralasciando la terza figura, ove la somma la porti. Con queste venti coppie di numeri formo i venti prodotti notati accanto ai numeri medesimi.

M	N	P	Q
07....71	$(100m+7)(100n+71)$	09....33	$(100m+9)(100n+33)$
17....41	$(100m+17)(100n+41)$	19....63	$(100m+19)(100n+63)$
27....11	$(100m+27)(100n+11)$	29....93	$(100m+29)(100n+93)$
37....81	$(100m+37)(100n+81)$	39....23	$(100m+39)(100n+23)$
47....51	$(100m+47)(100n+51)$	49....53	$(100m+49)(100n+53)$
57....21	$(100m+57)(100n+21)$	59....83	$(100m+59)(100n+83)$
67....91	$(100m+67)(100n+91)$	69....13	$(100m+69)(100n+13)$
77....61	$(100m+77)(100n+61)$	79....43	$(100m+79)(100n+43)$
87....31	$(100m+87)(100n+31)$	89....73	$(100m+89)(100n+73)$
97....01	$(100m+97)(100n+1)$	99....03	$(100m+99)(100n+3)$

A ciascheduno dei venti notati prodotti metto eguale il numero proposto, e separando in ognuna delle venti equazioni, che nascono, tanto l'una indeterminata m , quanto l'altra n , ottengo le venti seguenti coppie di formole frazionarie.

1. $\frac{42949668 - 7n}{100n + 71} = m, \quad \frac{42949668 - 71m}{100m + 7} = n$
 2. $\frac{42949666 - 17n}{100n + 41} = m, \quad \frac{42949666 - 41m}{100m + 17} = n$
 3. $\frac{42949670 - 27n}{100n + 11} = m, \quad \frac{42949670 - 11m}{100m + 27} = n$
 4. $\frac{42949643 - 37n}{100n + 81} = m, \quad \frac{42949643 - 81m}{100m + 37} = n$
 5. $\frac{42949649 - 47n}{100n + 51} = m, \quad \frac{42949649 - 51m}{100m + 47} = n$
 6. $\frac{42949661 - 57n}{100n + 21} = m, \quad \frac{42949661 - 21m}{100m + 57} = n$
 7. $\frac{42949612 - 67n}{100n + 91} = m, \quad \frac{42949612 - 91m}{100m + 67} = n$
 8. $\frac{42949626 - 77n}{100n + 61} = m, \quad \frac{42949626 - 61m}{100m + 77} = n$
 9. $\frac{42949646 - 87n}{100n + 31} = m, \quad \frac{42949646 - 31m}{100m + 87} = n$
 10. $\frac{42949672 - 97n}{100n + 1} = m, \quad \frac{42949672 - m}{100m + 97} = n$
 11. $\frac{42949670 - 9n}{100n + 33} = m, \quad \frac{42949670 - 33m}{100m + 9} = n$
- T. II. P. II. 58

$$12. \frac{42949661 - 19n}{100n + 63} = m, \quad \frac{42949661 - 63m}{100m + 19} = n$$

$$13. \frac{42949646 - 29n}{100n + 93} = m, \quad \frac{42949646 - 93m}{100m + 29} = n$$

$$14. \frac{42949664 - 39n}{100n + 23} = m, \quad \frac{42949664 - 23m}{100m + 39} = n$$

$$15. \frac{42949647 - 49n}{100n + 53} = m, \quad \frac{42949647 - 53m}{100m + 49} = n$$

$$16. \frac{42949624 - 59n}{100n + 83} = m, \quad \frac{42949624 - 83m}{100m + 59} = n$$

$$17. \frac{42949664 - 69n}{100n + 13} = m, \quad \frac{42949664 - 13m}{100m + 69} = n$$

$$18. \frac{42949639 - 79n}{100n + 43} = m, \quad \frac{42949639 - 43m}{100m + 79} = n$$

$$19. \frac{42949608 - 89n}{100n + 73} = m, \quad \frac{42949608 - 73m}{100m + 89} = n$$

$$20. \frac{42949670 - 99n}{100n + 3} = m, \quad \frac{42949670 - 3m}{100m + 99} = n$$

Intraprendendo la sostituzione successiva delle nove figure aritmetiche significanti in luogo dell'indeterminata giunto alla formola prima della seconda coppia trovo che la sostituzione del numero 6 fa riuscire

$$\frac{42949564}{641} = m, \text{ dove fatta la divisione a rovescio, co-}$$

me qui si mostra

$$\begin{array}{r}
 42949564 \\
 \underline{2564} \\
 42947000 \\
 \underline{4487} \\
 38460 \\
 \underline{3846} \\
 \dots
 \end{array}
 \quad 67004$$

si ottiene m intiero $= 67004$. Dunque dei due fattori, in cui si risolve il numero proposto, il minore è 641. L'altro sarà $100m + 17 = 100 \cdot 67004 + 17 = 6700417$.

Ma non potrebb' egli ancor questo maggior fattore avere due fattori uno di tre, l'altro di quattro, o cinque figure, i quali sarebber pure fattori del numero proposto? Certo che sì, perchè essendo 2583 la radice del più gran quadrato in esso contenuto, potrebbe anche averne due amendue di quattro figure. Dunque poichè questo numero 6700417 comincia anch' egli, come il numero da prima proposto, per 7, torno alle seconde formole già ricavate, e seguito in esse la sostituzione delle nove figure significanti, e trovo il lavoro assai meno penoso di quel che parrebbe considerando, che le formole sono trentasette, e che in ognuna si dovrebbero fare nove sostituzioni, e altrettante divisioni. Il grandissimo numero di volte che il denominatore riesce un numero, che per così dire a colpo d'occhio si vede, che è divisibile per 3, o per 7, o per 11, o per 13, o per 17, o per 19, fa che non s'abbiano da eseguire che assai poche divisioni. Ma siccome niuna di queste si fa senza avanzo, così si può conchiudere, che il numero

6700417 non può avere un fattore scritto con sole tre figure, quando per avventura il numero proposto $2^{25} + 1$ non avesse due volte il fattore 641, che si è già trovato, del che mi accorgerò col sostituire anche il zero in quella delle terze formole, a cui dovrò passare, la quale avrà per denominatore $1000n + 641$.

Vediam dunque se possa risolversi in due fattori amendue di quattro figure. Supposto che possa, siccome il minor di essi non può esser maggiore di 2588, così nelle terze formole non si avranno da metter alla prova che due numeri, cioè 1, e 2. Qui dunque il lavoro più gravoso parrà quello di preparare i numeri, che hanno da servire a formar i prodotti da mettersi eguali al numero 6700417 per cavarne le terze formole: ma questo ancora si renderà facile avvertendo che, come ne' numeri scritti già in *N*, e in *Q*, così anche in questi regna una legge nell'ordine loro. In fatti a ciascuno dei numeri stessi notati in *M* metto dietro in terzo luogo una dopo l'altra le dieci figure aritmetiche, e formo le dieci colonne *R*. Dirimpetto ai numeri della prima colonna *R* noto quel numero, che avendo per figura iniziale 1, e moltiplicato pel corrispondente numero *R* dà un prodotto, che comincia per 417, come comincia il numero proposto, e formo così la prima colonna *S*. Non è difficile trovare questi tali numeri, come neppure quello da scriversi dirimpetto al primo della seconda colonna *R*, trovato il quale m'accorgo, che le seguenti colonne *S* si formano col semplice aggiungere 700 al corrispondente numero della colonna *S* precedente sopprimendo nella somma la quarta

figura, quando la somma sorpassa 999.

Nella stessa maniera valendomi dei numeri scritti di sopra in P formo le dieci colonne T , e dirimpetto ai numeri della prima, come pure dirimpetto al primo della seconda colonna scrivo il numero, che avendo per figura iniziale 3, e moltiplicato pel corrispondente numero T produce un numero, che comincia per 417, e così formo la prima colonna V , e dal paragone del primo numero della seconda colonna V col primo della prima colonna V rilevo, che per avere le susseguenti colonne V basta aggiungere 300 al numero corrispondente della colonna V precedente sopprimendo la quarta figura della somma, qualora questa sorpassa 999.

R	S	R	S	R	S	R	S	R	S
007....631	107....331	207....031	307....731	407....431					
017....201	117....901	217....601	317....301	417....001					
027....571	127....271	227....971	327....671	427....371					
037....741	137....441	237....141	337....841	437....541					
047....711	147....411	247....111	347....811	447....511					
057....481	157....181	257....881	357....581	457....281					
067....051	167....751	267....451	367....151	467....351					
077....421	177....121	277....821	377....521	477....221					
087....591	187....291	287....991	387....691	487....391					
097....561	197....261	297....961	397....661	497....361					

<i>R</i>	<i>S</i>	<i>R</i>	<i>S</i>	<i>R</i>	<i>S</i>	<i>R</i>	<i>S</i>	<i>R</i>	<i>S</i>
507....131		607....831		707....531		807....231		907....931	
517....701		617....401		717....101		817....801		917....501	
527....071		627....771		727....471		827....171		927....871	
537....241		637....941		737....641		837....341		937....041	
547....211		647....911		747....611		847....311		947....011	
557....981		657....681		757....381		857....081		957....781	
567....551		667....251		767....951		867....651		967....351	
577....921		677....621		777....321		877....021		977....721	
587....091		687....791		787....491		887....191		987....891	
597....061		697....761		797....461		897....161		997....861	

<i>T</i>	<i>V</i>	<i>T</i>	<i>V</i>	<i>T</i>	<i>V</i>	<i>T</i>	<i>V</i>	<i>T</i>	<i>V</i>
009....713		109....013		209....313		309....613		409....913	
019....443		119....743		219....043		319....343		419....643	
029....773		129....073		229....373		329....673		429....973	
039....703		139....003		239....303		339....603		439....903	
049....233		149....533		249....833		349....133		449....433	
059....363		159....663		259....963		359....263		459....563	
069....093		169....393		269....693		369....993		469....293	
079....423		179....723		279....023		379....323		479....623	
089....353		189....653		289....953		389....253		489....553	
099....883		199....183		299....483		399....783		499....083	

SU' DIVISORI DI QUALSIVOGLIA NUMERO 467

<i>T</i>	<i>V</i>	<i>T</i>	<i>V</i>	<i>T</i>	<i>V</i>	<i>T</i>	<i>V</i>	<i>T</i>	<i>V</i>
509....213	609....513	709....813	809....113	909....413					
519....943	619....243	719....543	819....843	919....143					
529....273	629....573	729....873	829....173	929....473					
539....203	639....503	739....803	839....103	939....403					
549....733	649....033	749....333	849....633	949....933					
559....863	659....163	759....463	859....763	959....063					
569....593	669....893	769....193	869....493	969....793					
579....923	679....223	779....523	879....823	979....123					
589....853	689....153	789....453	889....753	989....053					
599....383	699....683	799....983	899....283	999....583					

Con queste dugento coppie di numeri formo i dugento prodotti

$$(1000m + 7)(1000n + 631)$$

$$(1000m + 17)(1000n + 201)$$

&c.

&c.

e messo ad ognuno eguale il numero 6700417 separo in ciascuna equazione l'una e l'altra indeterminata m , n , e ricavo dugento coppie di formole frazionarie

$$1. \quad \frac{6696 - 7n}{1000n + 631} = m, \quad \frac{6696 - 631m}{1000m + 7} = n$$

$$2. \quad \frac{6697 - 17n}{1000n + 201} = m, \quad \frac{6697 - 201m}{1000m + 17} = n$$

&c.

&c.

in ognuna delle quali si devono sostituire un dopo l'altro in luogo dell'indeterminata, che contiene, i numeri 1, e 2 per vedere se qualcuna si converte in numero intero, non dimenticando di sostituire anche il zero nella prima formola della settantesima quarta coppia a fine di vedere se il numero da prima proposto avesse mai due volte il fattore 641; la qual indagine, che parrebbe sommamente vasta, riesce sul fatto assai spedita; perciocchè facilmente m'accorgo, a cagion d'esempio, che la prima formola mettendo 1 in luogo di n porta il denominatore 1631 divisibile per 7, e mettendovi 2 porta 2631 divisibile per 3; onde la ometto (XI). Ma quand'anche non mi fossi di ciò accorto, egli è chiaro, che in questa, come in ogni altra delle quattrocento formole, o si metta 1, o si metta 2 in luogo dell'indeterminata, tanto il numeratore, quanto il denominatore riesce un numero di quattro figure, e però anche senza aver la penna in mano veggio che il numeratore di quella prima formola al mettere 1 in luogo di n comincerà per 9, e per conseguenza non potrà aver luogo la divisione senza avanzo, perchè facendola a rovescio converrebbe da quel numeratore sottrarre il nonuplo del denominatore, il quale è certamente maggiore dello stesso numeratore; mettendo poi 2 in luogo di n veggio, che il numeratore comincerà per 2, e sottraendone il doppio del denominatore ne viene un avanzo, che trascurato il zero a destra è di tre figure, dal quale non si potrà certamente sottrarre il denominatore di quattro figure, e molto meno un di lui multiplo: sicchè non può mai riuscire la divisione senza

avanzo In somma ben presto scopro, che nissuna delle quattrocento formole frazionarie si converte in intero, e conchiudo, che il numero 6700417 è numero primo, e quindi che il numero $2^{2^5} + 1$ non ha altri fattori oltre 641, e 6700417.

XIII. *Altro csempio.* I numeri compresi nell' espressione $3^{2^r} + 2$ sono numeri primi finchè si mette $r = 1$, $r = 2$, $r = 3$. Si cerca se sia numero primo anche $3^{2^4} + 2 = 43046723$.

I due prodotti, ne' quali si possono rappresentare due fattori, in cui si risolve questo numero, sono

$$(10m + 3)(10n + 1)$$

$$(10m + 9)(10n + 7)$$

e questi eguagliati al numero medesimo somministrano le due equazioni, donde si cavano le quattro formole prime

$$\frac{4304672 - 3n}{10n + 1} = m, \quad \frac{4304672 - m}{10m + 3} = n;$$

$$\frac{4304666 - 9n}{10n + 7} = m, \quad \frac{4304666 - 7m}{10m + 9} = n$$

Mettendo 0, 1, 2 9 in luogo dell'indeterminata, le prime tre formole non danno mai un intero; ma la quarta al metter che si fa $m = 1$ si converte nell'intero $226561 = n$. Dunque il numero $3^{2^4} + 2$ non è primo, ed il minore de' suoi fattori è 19: il maggiore sarà $10.226561 + 7 = 2265617$. Seguitando a metter in luogo di m in quella quarta formola gli

altri numeri 2, 3..... 9 più non si converte essa in numero intero, e però non ha il numero proposto altro fattore di sole due figure oltre 19.

Se il numero $3^{2^4} + 2$ oltre questi due già trovati avesse altri fattori, sarebbero essi fattori anche del maggiore di questi due, cioè del numero 2265617, e sarebbero rappresentati in uno dei due seguenti prodotti

$$(10m + 7)(10n + 1)$$

$$(10m + 9)(10n + 3)$$

Ora questi due prodotti messi eguali al numero 2265617 somministrano le quattro formole

$$\frac{226561 - 7n}{10n + 1} = m, \quad \frac{226561 - m}{10m + 7} = n;$$

$$\frac{226559 - 9n}{10n + 3} = m, \quad \frac{226559 - 3m}{10m + 9} = n$$

nelle quali è inutile fare la sostituzione dei numeri 1, 2, 3.... 9, perchè si è già veduto, che il numero proposto non ha fuori del 19 verun altro fattore scritto con meno di tre figure: solamente nella quarta sostituisco in luogo di m l'unità per vedere se vi fosse due volte il fattor 19. In fatti risulta $11924 = n$. Dunque il numero $3^{2^4} + 2$ ha due volte il fattore 19, e per conseguenza un altro fattore di esso sarà $19 \cdot 19 = 361$: un altro fattore poi sarà $10 \cdot 11924 + 3 = 119243$.

Per sottoporre all'esame anche questo nuovo fattore 119243, il quale potrebbe esser ancor esso nu-

mero non primo, si avranno le quattro formole prime

$$\frac{11924 - 3n}{10n + 1} = m, \quad \frac{11924 - m}{10m + 3} = n;$$

$$\frac{11918 - 9n}{10n + 7} = m, \quad \frac{11918 - 7m}{10m + 9} = n$$

e qui pure non fo altra sostituzione che quella di 1 in luogo di m nella quarta formola a fine di vedere se il numero proposto avesse mai tre volte il fattore 19; ma trovando che no, passo a preparare le venti coppie di numeri a due figure, ognuna delle quali coppie sia formata in modo, che moltiplicati insieme i due numeri si abbia un prodotto, che cominci, come il numero ora proposto, per 43. Le venti coppie sono

03....81	09....27
13....11	19....97
23....41	29....67
33....71	39....37
43....01	49....07
53....31	59....77
63....61	69....47
73....91	79....17
83....21	89....87
93....51	99....57

dalle quali nascono al solito venti prodotti, che egua-

gliati al numero 119243 somministrano venti coppie di formole, che sono le seguenti

1. $\frac{1190 - 3n}{100n + 81} = m, \quad \frac{1190 - 81m}{100m + 3} = n$
2. $\frac{1191 - 13n}{100n + 11} = m, \quad \frac{1191 - 11m}{100m + 13} = n$
3. $\frac{1183 - 23n}{100n + 41} = m, \quad \frac{1183 - 41m}{100m + 23} = n$
4. $\frac{1169 - 33n}{100n + 71} = m, \quad \frac{1169 - 71m}{100m + 33} = n$
5. $\frac{1192 - 43n}{100n + 1} = m, \quad \frac{1192 - m}{100m + 43} = n$
6. $\frac{1176 - 53n}{100n + 31} = m, \quad \frac{1176 - 31m}{100m + 53} = n$
7. $\frac{1154 - 63n}{100n + 61} = m, \quad \frac{1154 - 61m}{100m + 63} = n$
8. $\frac{1126 - 73n}{100n + 91} = m, \quad \frac{1126 - 91m}{100m + 73} = n$
9. $\frac{1175 - 83n}{100n + 21} = m, \quad \frac{1175 - 21m}{100m + 83} = n$
10. $\frac{1145 - 93n}{100n + 51} = m, \quad \frac{1145 - 51m}{100m + 93} = n$
11. $\frac{1190 - 9n}{100n + 27} = m, \quad \frac{1190 - 27m}{100m + 9} = n$
12. $\frac{1174 - 19n}{100n + 97} = m, \quad \frac{1174 - 97m}{100m + 19} = n$

$$13. \frac{1173 - 29 n}{100 n + 67} = m, \quad \frac{1173 - 67 m}{100 m + 29} = n$$

$$14. \frac{1178 - 39 n}{100 n + 37} = m, \quad \frac{1178 - 37 m}{100 m + 39} = n$$

$$15. \frac{1189 - 49 n}{100 n + 7} = m, \quad \frac{1189 - 7 m}{100 m + 49} = n$$

$$16. \frac{1147 - 59 n}{100 n + 77} = m, \quad \frac{1147 - 77 m}{100 m + 59} = n$$

$$17. \frac{1160 - 69 n}{100 n + 47} = m, \quad \frac{1160 - 47 m}{100 m + 69} = n$$

$$18. \frac{1179 - 79 n}{100 n + 17} = m, \quad \frac{1179 - 17 m}{100 m + 79} = n$$

$$19. \frac{1115 - 89 n}{100 n + 87} = m, \quad \frac{1115 - 87 m}{100 m + 89} = n$$

$$20. \frac{1136 - 99 n}{100 n + 57} = m, \quad \frac{1136 - 57 m}{100 m + 99} = n$$

Siccome il fattor, che si cerca se vi sia, dee esser minore di 345 radice del più gran quadrato contenuto nel numero 119243, così in ciascuna di queste formole basta in luogo dell' indeterminata sostituire i soli tre numeri 1, 2, 3. Ma con somma facilità usando le avvertenze notate alla fine del paragrafo XII trovo che nissuno di questi numeri converte formola alcuna in numero intiero. Il numero adunque 119243 è primo, e il numero $3^4 + 2$ non ha altri divisori oltre quelli, che si sono già trovati, cioè 19 due volte, 361, 119243, 2265617.

XIV. In questo secondo esempio subito che si arrivò mediante le prime quattro formole a scoprire, che il numero proposto $3^{2^4} + 2$ non può aver fuori di 19 altro fattore scritto con meno di tre figure, si poteva immediatamente per esso intraprendere la divisione dell'altro fattore 2265617, e vedendo che riesce senza avanzo, ma che il quoziente 119243 non è poi divisibile per 19, conchiudere che il numero $3^{2^4} + 2$ ha due volte e non più questo divisore 19, e quindi passar senz'altro a trovar le venti coppie di formole seconde per metter alla prova il numero 119243. Così si sarebbe avuto un risparmio di formole; il quale si potrà in pratica sempre avere, quando dopo trovato un fattore si vuol conoscere, se egli divida più di una volta un numero proposto.

XV. Non dee recar maraviglia, che in questo stesso secondo esempio cercando se vi fosse un fattore scritto con tre figure si sia trovato che no, quando per altro si è veduto, che il numero proposto $3^{2^4} + 2$ è divisibile per 19. $19 = 361$, che è pur scritto con tre figure. Ben si vede, che il metodo di tentativo, che si è esposto, è tale, che quando ha dato una volta un divisore, non può tornar a darlo un'altra volta, se per avventura il numero proposto non lo contenga più d'una volta. Ora il metodo, che ha già dato due volte il divisore 19, viene così ad aver dato anche il divisore $19 \cdot 19 = 361$, e quindi non poteva tornar a dare questo divisore 361, il quale una sola volta può dividere il numero proposto.

XVI. Forse si dirà, che l'esposto metodo in somma si riduce a dover provare come possibili divisori

del proposto numero A tutti i numeri dispari, che non cominciano per 5, e che sono minori della radice del più gran quadrato contenuto in A . Ciò è vero; ma è vero altresì, che per tutti questi numeri si hanno da dividere, non già il numero A , ma numeri più piccoli, e sempre più piccoli di A , e così le divisioni si eseguono tanto più facilmente, di modo che all'ultimo, anche senza scrivere, si scorge se possano, o no riuscir senza avanzo, massime se, come è stato notato (X) facciansi a rovescio. Nè questo, in mancanza massimamente della tavola dei numeri primi, è piccolo vantaggio in una ricerca, in cui pare certamente, che non possa procedersi che tentando. Per poco poi che il calcolatore abbia la pratica del conteggiare, facilmente s'accorge egli quando il denominatore d'una formola riesce divisibile per uno anche dei soli sei numeri molto semplici 3, 7, 11, 13, 17, 19, nel qual caso si omette (XI) di dividere per esso il numeratore: ed è ben grande il numero delle operazioni, che vengono così a risparmiarsi.

XVII. Nonostantechè si usino queste avvertenze, e tutte le altre, che di sopra si sono all'occasione notate, e quelle, che sul fatto offerir si possono all'abile calcolatore, le quali tutte danno luogo a molti e molti compendj, non si può negare, che l'esposto metodo non richieda una gran serie d'operazioni, qualora il numero proposto sia molto grande. Pure trattandosi di un problema, che forse non può sciorsi che tentando, sarò contento, se avrò indicato il tentativo più sicuro, e meno al parer mio faticoso;

e molto maggiormente lo sarò, se abbia così dato occasione ai valenti Analisti, che onorano la nostra Italia, di scoprire una via per giunger all'intento affatto diretta, o almeno più compendiosa.

INDICE

Discorso e Osservazioni intorno i recenti progressi dovuti agl' Italiani delle scienze matematiche e fisiche pag. III

1. Fine degli elementi di trigonometria sferoidica. Di *Barnaba Oriani* pag. 1
2. Continuazione delle osservazioni e sperienze sopra la teoria della resistenza de' fluidi del sig. Giorgio Juan. Di *Giuseppe Avanzini* 59
3. Sopra i Criterj che distinguono i Massimi dai Minimi delle formole integrali doppie. Di *Vincenzio Brunacci* 121
4. Continuazione della parte 2^a. sulle livellazioni barometriche. Di *Francesco Venini* 171
5. Sull'apparecchio laterale; con nuove modificazioni degli strumenti descritti in altra memoria inserita nella prima parte di questo tomo. Di *Giuseppe Attu* 241
6. Della simiglianza meccanica. Di *Paolo Delanges* 251
7. Della inclinazione delle sponde negli alvei de' fiumi. Di *Simone Stratico* 261
8. Supplemento alle osservazioni sopra la teoria della resistenza de' fluidi del sig. Juan. Di *Giuseppe Avanzini* 321
9. Altra Continuazione della parte 2^a. sulle livellazioni barometriche. Di *Francesco Venini*. 341
10. Metodo d'indagare i divisori di qualsivoglia dato numero. Di *Sebastiano Canterzani* 445



